Kantonsschule Romanshorn

Thurgau

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2012

MATHEMATIK – 3 Std.

Maturandin, Maturand (Name, Vorname) **Klasse 4 Mcde – hcs**

.... Lehrperson.......... Klasse............

Datum: *Montag, 11. Juni 2012*

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Punkte: [ ] **Note:** [ ]

Zeit: 180 Minuten

Hilfsmittel
- Taschenrechner (TI-Voyage 200, TI-92, TI-89)
- Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

Beachten Sie
- Lösen Sie die Aufgaben direkt auf diesem Bogen auf der entsprechenden Doppelseite.
- Nutzen Sie bei Platzmangel die hintersten leeren Seiten und vermerken Sie dies bei der entsprechenden Aufgabe.
- Lassen Sie rechts 2 cm Rand frei, schreiben Sie NICHT mit Bleistift.
- Runden Sie alle Ergebnisse sinnvoll.
- Streichen Sie falsche Lösungen deutlich durch.
- Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
- Die Punktzahlen der Aufgaben können Sie der Tabelle entnehmen, verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick. Total sind 72 Punkte möglich.
- In der Regel ergeben ca. 60 Punkte eine Sechs, 36 Punkte eine Vier.
- Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:
- **Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !**

Viel Glück!

leer lassen

Aufg 1	Aufg 2	Aufg 3	Aufg 4	Aufg 5	Aufg 6		total
von 12	von 12	von 9	von 12	von 12	von 15		von 72

1) **Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion und Flächenberechnung 12 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{4 \cdot (3x - 1)}{x^3}$.

a) Die ersten beiden Ableitungsfunktionen von f(x) lauten: 5 P

$f'(x) = \dfrac{-12 \cdot (2x - 1)}{x^4}$; $f''(x) = \dfrac{24 \cdot (3x - 2)}{x^5}$

Untersuchen Sie die Funktion (ohne den Graphen zu skizzieren) und geben Sie an...
- Definitionsbereich
- Nullstellen
- Gleichungen der Asymptoten
- Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

b) Zeigen Sie ohne Taschenrechner, dass $F(x) = \dfrac{2 \cdot (1 - 6x)}{x^2}$ eine Stammfunktion von f ist. 2 P

c) Der Graph der Funktion f und die x-Achse schliessen im 1. Quadranten eine nach rechts offene Fläche ein. 3 P
   i) Erstellen Sie dazu eine aussagekräftige Skizze und schraffieren Sie die beschriebene Fläche.
   ii) Berechnen Sie den beschriebenen Flächeninhalt mit Hilfe der Stammfunktion aus Teilaufgabe b).

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f im Punkt $P(\frac{2}{3}|?)$. 2 P

2) **Vektorgeometrie**
12 Punkte

Gegeben sind die Punkte A(0|4|7), B(2|–2|17), C(–17|15|10),

die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$

sowie die Ebene E_1 mit der Koordinatengleichung E_1: $x + 2y = 0$.

a) Die Gerade g und die Gerade durch A und B schneiden sich im Punkt S. 4 P
   i) Bestimmen Sie die Koordinaten von S.
   ii) Liegt der Punkt S zwischen den Punkten A und B? Begründung!

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. 2 P

c) Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch A, B und C aufgespannt wird. 2 P

d) Überprüfen Sie, ob sich A und B auf der gleichen Seite der Ebene E_1 befinden. 2 P

e) Für welchen Wert von k hat die Ebene E_k mit E_k: $k \cdot x + (3k - 1) \cdot y = 0$ keinen Schnittpunkt mit der Geraden g? 2 P

3) **Wetterprognosen,**
Binomialverteilung, Bäume und Wahrscheinlichkeiten
9 Punkte

In der folgenden Tabelle ist eine 10-Tages-Wetterprognose für Romanshorn dargestellt.

	Mo	**Di**	**Mi**	**Do**	**Fr**
Temperatur	**8 | 11 °C**	**6 | 9 °C**	**6 | 8 °C**	**7 | 10 °C**	**8 | 12 °C**
Sonnenschein	**10%**	**5%**	**5%**	**20%**	**40%**

	Sa	**So**	**Mo**	**Di**	**Mi**
Temperatur	**8 | 13 °C**	**8 | 15 °C**	**9 | 18 °C**	**8 | 17 °C**	**8 | 16 °C**
Sonnenschein	**50%**	**80%**	**80%**	**80%**	**80%**

Die Sonnenschein–Wahrscheinlichkeiten sind dabei voneinander unabhängig (d.h. wenn z.B. am Freitag die Sonne schien, ändert das nichts an den 50% vom Samstag).

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne an allen aufeinanderfolgenden Tagen Mittwoch, Donnerstag, Freitag und Samstag scheint? 1 P

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne an **genau einem** der ersten beiden Tage der Prognose (Montag oder Dienstag) scheint? Stelle in einem beschrifteten Baumdiagramm dar! 2 P

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne an mindestens einem der beiden Montage scheint? 1 P

Am Sonntag stellt sich eine stabile Wetterlage mit einer gleichbleibenden Sonnenschein–Wahrscheinlichkeit von 80% für jeden darauf folgenden Tag ein, die mindestens auch noch den Donnerstag und den Freitag (die nicht mehr in der 10–Tages–Prognose aufgeführt sind) anhalten wird.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne an genau vier der sechs Tage (Sonntag bis Freitag) scheinen wird? 1 P

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sonne an mindestens einem der sechs Tage von Sonntag bis Freitag **nicht** scheint? Berechne mit **zwei** verschiedenen Lösungsansätzen! 2 P

f) Wie lange muss die stabile Wetterlage von Sonntag an noch weiter anhalten, dass die Wahrscheinlichkeit, dass an mindestens drei Tagen die Sonne scheint, grösser als 99.9% ist? 2 P

4) **Vektorgeometrie,**
12 Punkte

a) Gegeben ist eine Gerade g : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

i) Berechnen Sie den Winkel von g zur y–Achse. 2 P

ii) Schneidet die Gerade den Kreis mit Mittelpunkt M(7|9) und Radius r = 13 ? Begründen Sie rechnerisch. 3 P

iii) Bestimmen Sie eine Parametergleichung einer Geraden h, die senkrecht zu g steht und durch den Mittelpunkt M(7|9) des Kreises aus Teilaufgabe b) geht. 1 P

b) Gegeben sind die Ebenen E: x + y + z – 1 = 0 und F: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

i) Wie weit ist der Nullpunkt von E entfernt? 1 P

ii) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Schnittgeraden von E und F. 3 P

iii) Wo schneidet die z–Achse die Ebene F ? 2 P

5) **Ausbreitung einer Epidemie, Analysis**
12 Punkte

An der Kantonsschule Romanshorn breitet sich die Krankheit "Minimalitis" nach dem Abgang des Matura–Jahrgangs 2012 aus. Die Krankheit äussert sich in Symptomen wie Lernen am letzten Tag vor der Prüfung oder Zufriedenheit mit knapp ungenügenden Noten. Eine kleine Gruppe von Lernenden beginnt am 13. August 2012, also dem ersten Schultag nach den Ferien, die Krankheit zu verbreiten (zu diesem Zeitpunkt ist $t = 0$).

Die Funktion $K(t) = \dfrac{300}{1 + 24 \cdot e^{-0.1t}}$ gibt dabei die Anzahl der angesteckten Personen der KSR zum Zeitpunkt t in Tagen ab dem 13. August an.

a) Wie viele Personen sind am 13. August, also zu Beginn der Zählung "angesteckt"? 1 P

b) Berechnen Sie K'(15), geben Sie die Einheit der Lösungszahl an und erklären Sie in einem kurzen Satz die Bedeutung dieser Lösungszahl. 2 P

c) Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} K(t)$ und geben Sie die Bedeutung der Lösungszahl an wenn Sie wissen, dass die KSR von 600 Lernenden besucht wird. 2 P

d) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner den Zeitpunkt, an dem sich die Epidemie am schnellsten ausbreitet. (Bzw. zu welchem Zeitpunkt gibt es die meisten Neuansteckungen?) 2 P

e) Lösen Sie ohne den Befehl *Löse(...)* bzw. *solve(...)*: Zu welchem Zeitpunkt sind erstmals genau 200 Lernende angesteckt? 2 P

f) Skizzieren Sie mit den obigen Daten den Graphen von K(t) übersichtlich und sauber im relevanten Bereich. 3 P

6) **Zwei unabhängige Aufgaben,**
15 Punkte

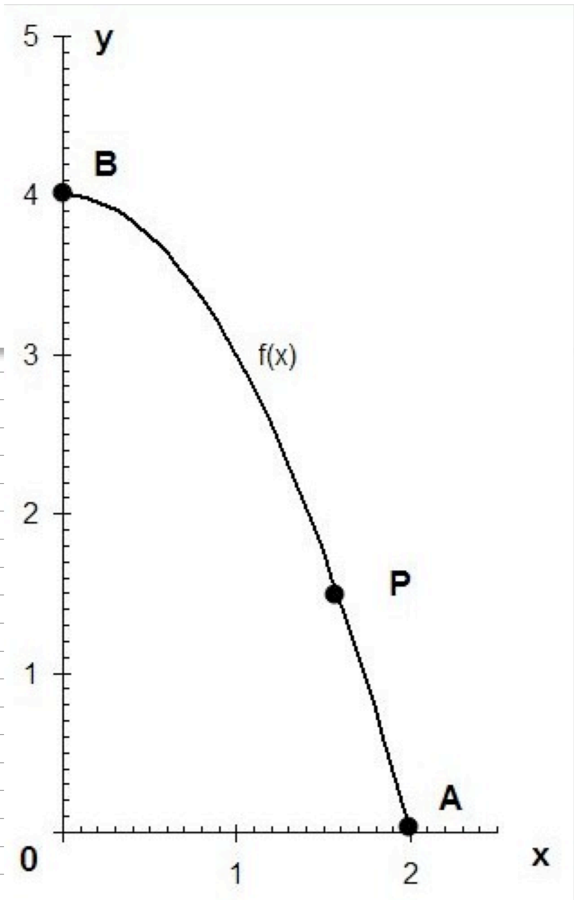
a) **Zufallsvariable, bedingte Wahrscheinlichkeit:** **Total 10 P**
Ein präparierter Würfel zeigt in 30% der Würfe eine Sechs, in nur 10% aller Würfe eine Eins. Die anderen Zahlen kommen gleich häufig. Der Würfel wird zwei Mal geworfen. Die Augensumme bezeichnet die Summe der beiden gewürfelten Zahlen.

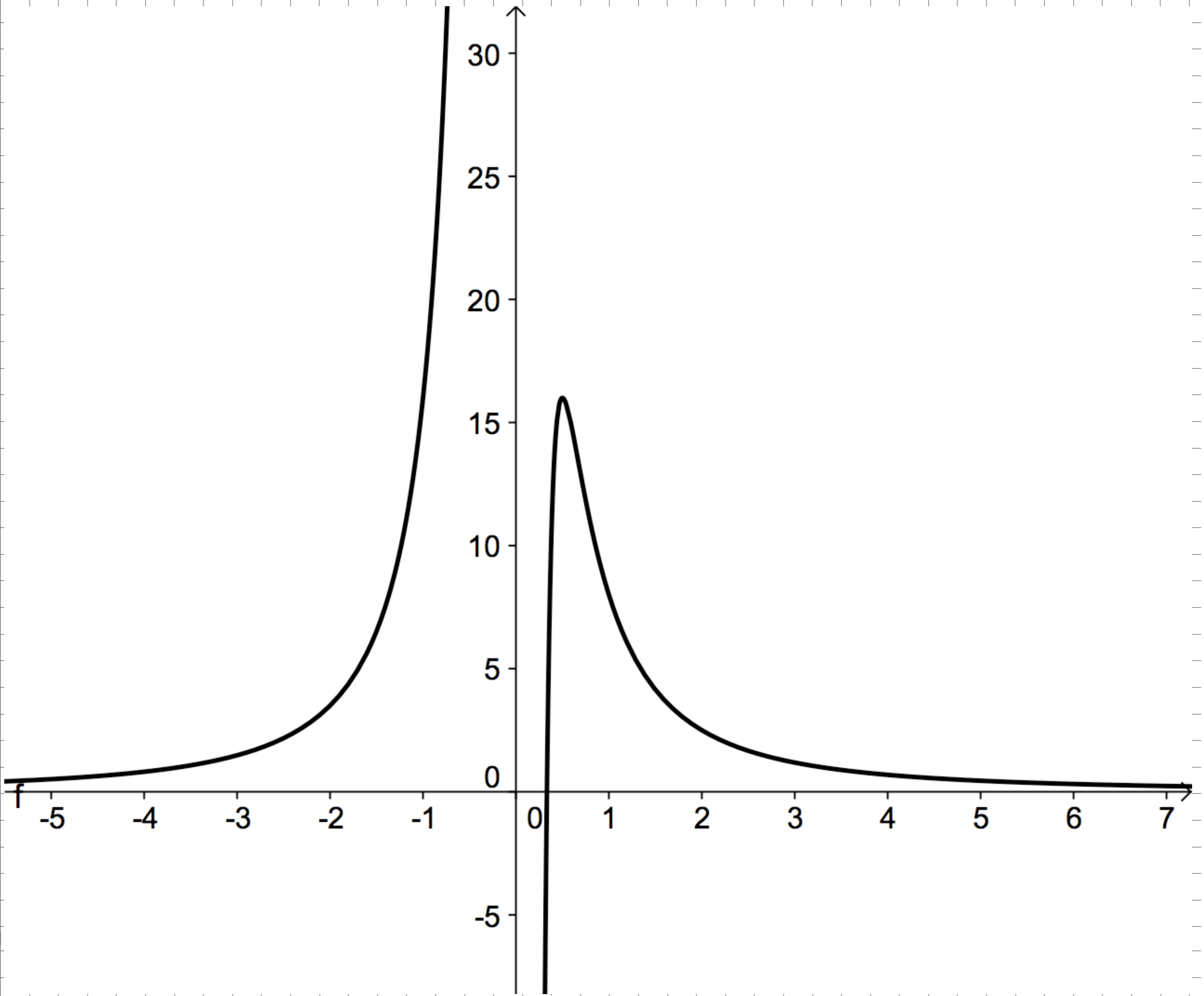
i) Sie werfen den präparierten Würfel zwei Mal und erzielen die Augensumme 10. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Wurf eine Sechs gewürfelt wurde? 3 P

ii) Ein Freund bietet Ihnen eine Wette mit dem präparierten Würfel an: Der Würfel wird zwei Mal geworfen. Bei der Augensumme 12 gewinnen Sie 20 Franken, bei einer Augensumme von 11 noch 10 Franken. Bei einer Augensumme von 4 oder weniger verlieren Sie 15 Franken. In allen anderen Fällen passiert nichts. Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn/Verlust bei einem Spiel mit Hilfe einer Zufallsvariablen. 4 P

iii) Untersuchen Sie, ob es wahrscheinlicher ist, mit dem präparierten oder mit einem fairen Würfel einen Pasch zu erzielen. (Pasch = beim zweimaligen Werfen des Würfels zwei Mal die gleiche Zahl zu werfen. Dabei ist es egal, welche der sechs Zahlen zwei Mal geworfen wird). Begründen Sie Ihre Antwort. 3 P

b) **Extremalaufgabe:** **5 P**
Auf der Parabel der Form $f(x) = 4 - x^2$ soll zwischen den Punkten A auf der x-Achse und B auf der y-Achse ein Punkt P auf der Parabel gesucht werden, sodass die Fläche des Vierecks OAPB maximal wird (O ist der Nullpunkt). Weisen Sie die Maximaleigenschaft rechnerisch nach. (Der Punkt P in der Skizze ist nicht die Lösung.)





1