Kantonsschule Romanshorn

Thurgau

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2011

MATHEMATIK – 3 Std.

Maturandin, Maturand (Name, Vorname) **Klasse 4 Mcd – hcs**

.... Lehrperson.......... Klasse............

Datum: *Dienstag, 14. Juni 2011*

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Punkte: [ ] **Note:** [ ]

Zeit: 180 Minuten

Hilfsmittel

- Taschenrechner (TI-Voyage 200, TI-92, TI-89)
- Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

Beachten Sie

- Jede Aufgabe ist auf einer separaten, mit dem Namen beschrifteten Seite zu lösen.
- Lassen Sie rechts 2 cm Rand frei, schreiben Sie NICHT mit Bleistift.
- Runden Sie alle Ergebnisse sinnvoll.
- Streichen Sie falsche Lösungen deutlich durch.
- Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
- Die Punktzahlen der Aufgaben können Sie der Tabelle entnehmen, verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick. Total sind 76 Punkte möglich.
- In der Regel ergeben ca. 60 Punkte eine Sechs, 36 Punkte eine Vier.
- Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:
- **Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !**

Viel Glück!

leer lassen

Aufg 1	Aufg 2	Aufg 3	Aufg 4	Aufg 5	Aufg 6		total
von 14	von 15	von 20	von 15	von 6	von 6		von 76

1) **Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion und Flächenberechnung**
14 Punkte

a) Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 + k}{x - 1}$.

i) *(1 Punkt)* Bestimmen Sie die erste Ableitung von f ohne Taschenrechner.

ii) (6 Punkte) Für $k = -3$ ist (mit Hilfe des Taschenrechners) eine vollständige Kurvendiskussion von f(x) durchzuführen. (Definitionsmenge, Nullstellen, Pole, Extrema, Wendepunkte, asymptotisches Verhalten, Graph)

iii) *(1 Punkt)* Finden Sie alle k, für die der Graph von f keine horizontale Tangenten hat (mit Taschenrechner).

b) Gegeben sind die beiden Funktionen f_1: $y = x^4 - 21.1x^2 + 42$ und f_2: $y = 0.7x^3 + 10.4x$

i) *(4 Punkte)* Berechnen Sie die Summe aller Flächeninhalte der Flächen, die von beiden Funktionen eingeschlossen werden (mit Taschenrechner).

ii) *(2 Punkte)* Unter welchem Winkel schneiden sich die Funktionen an der Stelle $x = 5$?

2) **Gerade, Ebene und ein Würfel**
Vektorgeometrie
15 Punkte

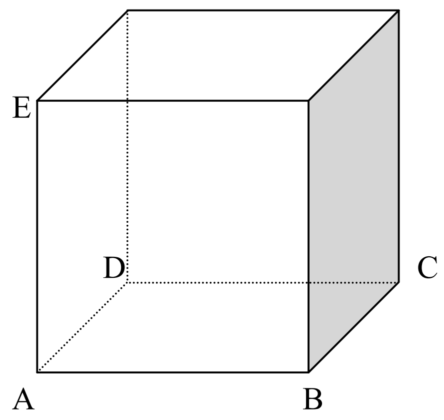
Gegeben ist die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und der Punkt Z(11|8|5).

a) *(3 Punkte)* Die Gerade g und der Punkt Z legen eine Ebene fest. Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene in der Form $Ax + By + Cz + D = 0$ an.

b) *(4 Punkte)* Gerade h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

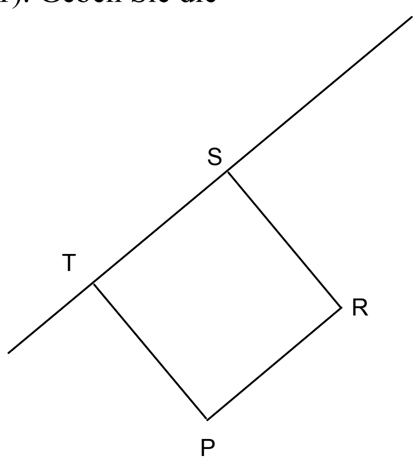
i) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Geraden g und h

ii) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und h



c) *(4 Punkte)* A(5|2|5), C(11|8|5) und D(9|4|9) sind drei Eckpunkte des Würfels ABCDEFGH. Geben Sie die Koordinaten der Ecke E an (siehe Skizze). Eine Lösung genügt.

d) *(4 Punkte)* Die Ecken T und S des Quadrates PRST liegen auf der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Man kennt den Punkt P(8|8|–1). Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte T und S an.



3) **Pünktlich an der Maturafeier?**
Kombinatorik, Binomialverteilung, Bäume und Wahrscheinlichkeiten, stat. Test
20 Punkte

Eine Kantonsschule hat 3 Abschlussklassen, die 4Mp (20 Lernende), die 4Mq (15 Lernende) und die – auch auf Französisch unterrichtete – 4Mx (25 Lernende). Man weiss aus Erfahrung, dass ein Lernender der Klassen 4Mp und 4Mq bei Anlässen wie der Maturafeier mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% zu spät erscheint, während ein Lernender der Klasse 4Mx mit einer Wahrscheinlichkeit von 8% zu spät erscheint.

a) *(2 Punkte)* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Maturand zu spät kommt?

b) *(2 Punkte)* Die Maturafeier beginnt, ein paar Minuten später stürmt eine Maturandin mit Verspätung in die Feier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine Schülerin der 4Mx handelt?
TIPP: Zeichnen Sie einen Baum.

c) *(2 Punkte)* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 25 Lernenden der Klasse 4Mx höchstens drei zu spät kommen?

d) *(2 Punkte)* Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Maturanden pünktlich zur Feier erscheinen?

e) *(4 Punkte)* Die Klassenlehrer der Klassen 4Mp und 4Mx machen eine Wette: Kommen alle Lernenden der 4Mx pünktlich, so erhält der Klassenlehrer der 4Mx (Herr Zog) 50 Fr, kommt genau ein Lernender zu spät so erhält er noch 10 Fr, falls 5 oder mehr Lernende zu spät kommen, so muss er 100 Franken bezahlen. In allen anderen Fällen muss niemand etwas bezahlen. Würden Sie an Herrn Zogs Stelle mitmachen? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

f) *(4 Punkte)* Die Abschlussklassen gehen nach der Maturafeier an einen Jahrmarkt, wo eine Achterbahn mit 12 Wagen aufgebaut ist. Fünf dieser Wagen sind gelb, vier rot und drei Wagen sind blau.
   i) Wie viele Anordnungen der Wagen sind möglich, wenn die Wagen nur nach der Farbe unterschieden werden?
   ii) Die Fahrgäste werden den einzelnen Wagen zufällig zugewiesen. Wie oft muss eine Person mitfahren, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens einmal mit einem roten Wagen fährt?

g) *(4 Punkte)* Die Maturanden gehen studieren. Herr Zog meint, das mit dem Zu–Spät–Kommen werde besser im Studium: die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studierender zu spät kommt, betrage dann nur noch 4% über alle Studierenden hinweg (Nullhypothese). Um dies zu testen, geht Herr Zog in eine Vorlesung mit 80 Studierenden.
   i) Formulieren Sie für diesen statistischen Test die Gegenhypothese.
   ii) Geben Sie den Verwerfungsbereich von Herrn Zogs Hypothese zum Signifikanzniveau von 5% an.
   iii) Tatsächlich sind 9 der 80 Studierenden zu spät gekommen. Kann Herr Zog seine Behauptung statistisch gesehen aufrecht erhalten?

4) **Kugel auf der Ebene – Vektorgeometrie, 15 Punkte**
Auf der Ebene E: $4x - 3z + 15 = 0$ liegt eine Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(5|4|-5)$.

a) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass der Radius der Kugel $r = 10$ beträgt.

b) *(1 Punkt)* Berechnen Sie irgend einen Punkt auf der Kugeloberfläche.

c) *(4 Punkte)* Die Kugel wird an der Ebene E gespiegelt. Berechnen Sie den Mittelpunkt M' der gespiegelten Kugel.

d) *(3 Punkte)* Beurteilen Sie rechnerisch, ob die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Kugel schneidet oder berührt.

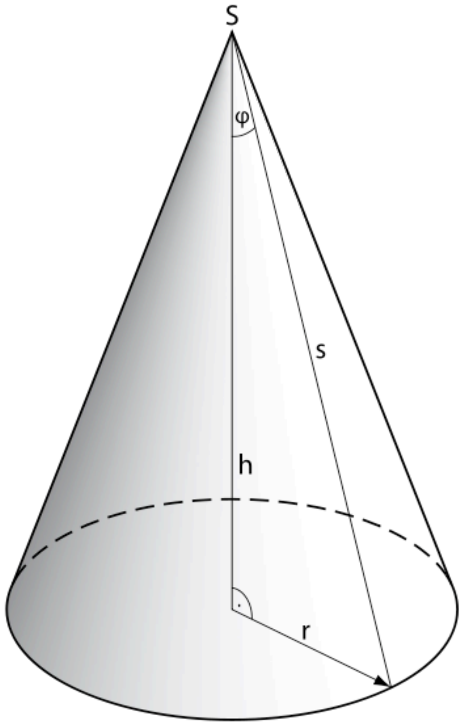
e) *(1 Punkt)* Geben Sie die Gleichung der Kugel k an.

f) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie die fehlende y–Koordinate des Punkts $P(13|y|-5)$, welcher auf der Kugeloberfläche liegt.

g) *(2 Punkte)* Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Tangentialebene T im Punkt $Q(-1|4|3)$ der Kugeloberfläche.

5) **Extremalaufgabe, Analysis**
6 Punkte

Sie sind an der Entwicklung einer neuen Kaffeemaschine beteiligt, die in kürzester Zeit grosse Mengen Filterkaffee produzieren soll. Der dazu passende Filter muss bei Vollauslastung Kaffeepulver und Wasser mit einem Volumen von insgesamt 2 Liter fassen können. Der Filter kann im mathematischen Modell als ein offener Kegel (also ohne den Grundkreis bzw. Boden) betrachtet werden, welcher dann umgedreht den Kaffee und das Wasser aufnimmt.
Bestimmen Sie den Radius r und die Höhe h des Kegels mit dem Taschenrechner so, dass Sie bei einem Filtervolumen von genau 2 Liter möglichst wenig Filterpapier zur Herstellung der Filter benötigen. (Notieren Sie für Teilpunkte Zielfunktion und Nebenbedingung, die Minimaleigenschaft müssen Sie nicht begründen.)



6) Wachstum und Zerfall, Analysis
6 Punkte

Bemerkung: Die Punktzahlen bekommen Sie nur bei Lösungen, die ohne die "solve" bzw. "Löse"-Funktion des Taschenrechners bestimmt werden.

Albumin ist das mengenmässig wichtigste Protein im Blutplasma. Bei einem Erwachsenen beträgt der Normalwert ca. 4.25 g/dl Blut. Ein Erwachsener hat durchschnittlich etwa 7 Liter Blut. Albumin wird kontinuierlich abgebaut und wieder erneuert. Am Tag einer Albumin-bestimmung (für t = 0) bei einem Patienten betrug die gemessene Menge im Blutplasma insgesamt 300 g. Von diesen 300 g waren nach 40 Tagen noch 75 g vorhanden. (225g wurden in dieser Zeit abgebaut.)

a) *(3 Punkte)* Geben Sie die Funktionsgleichung an, die den gemessenen Abbau beschreibt (in der Form $B(t) = B_0 \cdot q^t$)

b) *(3 Punkte)* Für die Erneuerung von Albumin im Blutplasma wird in einem medizinischen Fachbuch folgende Formel angegeben: $B(t) = 100\% \cdot \left(1 - 0.5^{0.05t}\right)$,

wobei t in Tagen gemessen wird.

i) Nach wie vielen Tagen ist 99% des Albumins erneuert?

ii) Wie viel Albumin wird täglich erneuert?