

**MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2010**

**MATHEMATIK - 3 Std.**

**Klasse 4 M - hcs/sig**

Name: \_\_\_\_\_

---

Hinweise für die Prüfung:

- Hilfsmittel: Taschenrechner (TI-Voyage 200, TI-92, TI-89), Formelsammlung
- Die Lösungen sind auf dem dafür vorhandenen Platz aufzuschreiben.
- Streichen Sie falsche Lösungen deutlich durch.
- Runden Sie alle Ergebnisse auf 2 Stellen nach dem Dezimalpunkt.
- 60 Punkte ergeben eine Sechs, 36 Punkte eine Vier.
- Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:
- Der Lösungsweg muss ersichtlich sein.

Viel Erfolg!

---

**Aufgabe 1: Analysis, 16 Punkte**

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{x^2(x+5)}{5(x-3)(x-1)}$ .

1. (3 P.) Bestimmen Sie die Nullstellen und die Asymptoten der Funktion.
2. (2 P.) Berechnen Sie die Extremalstellen und den Wendepunkt der Funktion mit Hilfe des Taschenrechners.
3. (4 P.) Zeichnen Sie die Asymptoten und die Nullstellen der Funktion in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie anschliessend den Funktionsgraphen im Bereich  $-6 \leq x \leq 10$ .
4. (4 P.) Die Fläche die von den Funktionen  $f(x)$  und  $g(x) = 0.2 \cdot x + 1$  im Intervall  $-5 \leq x \leq 0.75$  eingeschlossen wird, rotiert um die  $x$ -Achse. Erstellen Sie eine gute Skizze und berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers.
5. (3 P.) Zeigen Sie durch Ableiten von Hand, dass

$$F(x) = -\frac{1}{10} (6 \ln(x-1) - 72 \ln(x-3) - x(x+18))$$

eine Stammfunktion für  $f(x)$  im Bereich  $x > 3$  ist.

**Aufgabe 2: Vektorgeometrie, 16 Punkte**

Gegeben sind die Punkte  $A(5| -5|1)$  und  $B(1| -5| -1)$  sowie die Gerade mit der Parametergleichung

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. (1 P.) Bestimme eine Geradengleichung der Geraden  $h$  durch  $A$  und  $B$ .
2. (2 P.) Die beiden Geraden  $g$  und  $h$  schneiden sich im Punkt  $S$ . Bestimme die Koordinaten von  $S$ .
3. (2 P.) Die Geraden  $g$  und  $h$  spannen also eine Ebene  $E$  auf. Bestimme die Koordinatengleichung von  $E$ .
4. (2 P.) In welchem Winkel schneiden sich die Geraden  $g$  und  $h$ ? Gib den spitzen Schnittwinkel an.
5. (3 P.) Bestimme den Punkt  $L$  auf  $g$ , der vom Punkt  $C(2|1| -2)$  den kleinsten Abstand hat.
6. (2 P.) Bestimme eine Ebene  $F$  durch  $G(1| -3| -3)$  und  $C$ , die senkrecht auf  $E$  steht.
7. (4 P.) Bestimme den Punkt  $H$  auf der Geraden  $h$  so, dass das Volumen der Pyramide  $GLCH$  12 beträgt.

**Aufgabe 3: Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, 13 Punkte**

1. Die Eingangstüren einer Jugendherberge werden um 22 Uhr zentral verriegelt und lassen sich nur noch mit einem 6-stelligen Code öffnen, der über ein Tastaturfeld, das neben der Tür angebracht ist, eingegeben werden muss.

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
Q	R	S	T	U

Die Schüler beobachten die Lehrerin bei der Eingabe des Codes ganz genau, sehen aber trotzdem nicht alles. Wie viele Möglichkeiten für den Code gibt es,

- (1 P.) wenn aus jeder Zeile eine Taste gedrückt wird, und zwar in der Reihenfolge der Zeilen. D.h. der Code beginnt mit einer Ziffer aus der ersten Zeile, dann folgt eine Ziffer aus der zweiten Zeile, danach ein Buchstabe aus der 3., 4., 5. und zum Schluss aus der 6. Zeile.
- (1 P.) wenn zwar aus jeder Zeile eine Taste gedrückt wird, die Reihenfolge der Zeilen aber beliebig ist?
- (1 P.) wenn zuerst drei verschiedene Ziffern und dann drei verschiedene Buchstaben im Code vorkommen?
- (3 P.) Durch geschickte Fragen konnten die Schüler der Lehrerin einige Zusatzinformationen für den Code, der am letzten Tag gilt, entlocken:
  - der Code enthält nur Ziffern,
  - die gleiche Ziffer kann auch mehrmals vorkommen,
  - die 0 kommt nicht vor,
  - die Quersumme des Codes ergibt 8.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, wenn der Code alle vier Bedingungen erfüllt?

2. Ein Konservendosenfabrik stellt Dosen mit entsteinten Kirschen her. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kirsche nicht entsteint wurde, beträgt  $p = 0.023$ . In einer Dose befinden sich 30 Kirschen.
- (1 P.) Sie kaufen eine Dose. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Kirsche einen Stein enthält?
  - (2 P.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Dose 3 oder mehr Kirschen einen Stein enthalten?

Der Fabrikant hat eine neue Anlage in Betrieb genommen, die besser arbeitet. Die

Wahrscheinlichkeit, dass eine Kirsche nicht entsteint wird beträgt nur noch  $p = 0.01$ . Die neue Anlage liefert nun 80%, die alte Anlage 20% der Produktion. Die beiden Dosensorten werden gemischt und sind beim Kauf nicht zu unterscheiden.

- c) (4 P.) Ich kaufe eine Dose. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält sie mindestens einen Stein?  
In der gekauften Dose waren alle Kirschen entsteint. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde sie in der alten Anlage produziert?

#### Aufgabe 4: Analysis - Kurvendiskussion Anwendung, 10 Punkte

Bei einer Überschwemmung misst ein Hobbymathematiker den Wasserstand. Er berechnet damit eine Näherungsfunktion

$$H(t) = -0.0002t^4 + 0.001t^3 + 0.03t^2 + 1.8 \text{ für } 0 \leq t \leq 15,$$

welche den Wasserstand (gemessen in Meter) in Abhängigkeit der Zeit (in Stunden gemessen) angibt. Die Messungen begannen bei  $t = 0$  um exakt 0.00 Uhr am Überschwemmungstag und endeten um 15.00 Uhr.

1. (6 P.) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit dem Taschenrechner. Beantworten Sie anschliessend folgende Fragen mit Hilfe des Taschenrechners. Geben Sie den Lösungsweg bzw. Ihre Überlegungen in einigen Worten an.
  - a) Der normale Wasserstand des Flusses beträgt 1.8 Meter. Zeigen Sie, dass zu Beginn und am Ende der Messung der Wasserstand 1.8 Meter betrug.
  - b) Um wie viel Uhr (auf Minuten genau) erreichte das Wasser den Höchststand?
  - c) Wie viele Prozent höher als der Normalwasserstand war dieser Höchststand?
  - d) Um wie viel Uhr stieg das Wasser am schnellsten an?
  - e) Wie hoch stand das Wasser während dieser 15 Stunden im Durchschnitt?
  - f) Berechnen Sie  $H'(13)$  und geben Sie die Einheit der Lösungszahl an. Erklären Sie in einem kurzen Satz, was die Lösungszahl für den Wasserstand bedeutet.
2. (4 P.) Nach der Überschwemmung beruhigt sich der Fluss wieder und der Hobbymathematiker misst wieder die Wasserstände:
  - Um 0.00 Uhr betrug der Wasserstand 1.8m
  - Um 8.00 Uhr erreichte der Wasserstand seinen tiefsten Punkt, nämlich 1.6m
  - Um 12.00 Uhr betrug der Wasserstand wieder 1.8m

Finden Sie eine ganz rationale Funktion 3. Grades, welche den Wasserstand annähert bzw. welche die Bedingungen erfüllt. Lösen Sie die Gleichungen mit dem Taschenrechner.

#### Aufgabe 5: Vektorgeometrie - Anwendungen, 12 Punkte

Eine kugelförmige Aschewolke mit für den Flugverkehr gefährlichen Partikeln hat sich über einem Flughafen festgesetzt. Der Mittelpunkt der Wolke liegt bei den Koordinaten  $(120|13|6)$ , der Radius der Wolke beträgt 3km. Im Koordinatensystem entspricht die  $x$ -Achse der Ostrichtung, die  $y$ -Achse der Nordrichtung und die  $z$ -Achse der Höhe über der Meeresoberfläche. Die Einheiten sind in km gemessen.

1. (2 P.) Ein Flugzeug hat Navigationsprobleme und meldet sich bei den Koordinaten  $F(118|15|5.5)$ . Befindet es sich gerade in der Wolke? Begründe die Antwort.
2. (3 P.) Ein Wetterballon soll exakt in das Zentrum der Wolke bei  $Z(120|13|6)$ , geschickt werden. Der Ballon steigt mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s nach oben. Allerdings bläst ein Wind mit 3m/s aus Richtung Süden, welcher den Ballon um ebendiese Geschwindigkeit ablenkt.
  - a) Von welchem Punkt vom Boden aus ( $z = 0$ ) muss der Ballon losgelassen werden, damit er exakt zum Punkt  $Z(120|13|6)$  fliegt?
  - b) Wie lange (in Min) braucht der Ballon vom Boden bis zum Punkt  $Z(120|13|6)$  ?
3. (2 P.) Ein Flugzeug nähert sich auf einer geradlinigen Flugbahn entlang der Geraden  $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 95 \\ 40 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -0.2 \end{pmatrix}$ . Besteht für das Flugzeug Gefahr bzw. wie nahe kommt es der Aschewolke?
4. Ein sanft ansteigender Hügelzug in der Nähe der Wolke kann als Ebene mit der Gleichung  $x - y + 10z - 110 = 0$  angenommen werden. Das Sonnenlicht kommt aus der Richtung  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ .
  - a) (2 P.) Auf welchen Punkt des Hügelzugs fällt der Schatten des Wolkenzentrums  $(120|13|6)$ ?
  - b) (1 P.) In welchem Winkel zum Hügel fällt das Sonnenlicht ein?
  - c) (2 P.) Wie gross ist der längste Durchmesser des Schattens der kugelförmigen Wolke?

### Aufgabe 6: Zufallsvariable, Extremalaufgabe, 8 Punkte

1. (4 P.) In einer Urne liegen 7 rote und 8 gelbe Kugeln. Es werden 4 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsvariable  $X$  bezeichnet die Anzahl der gelben Kugeln. Bestimme den Erwartungswert.
2. (4 P.) Ein Fabrikant produziert Kisten mit quadratischer Grundfläche aus Pappkarton. Der Deckel besteht aus einer Lage Karton und lässt sich aufklappen. Der Boden besteht aus einer zweilagigen Pappkartonschicht. Jede Kiste umfasst ein Volumen von 12 dm<sup>3</sup>. Welche Masse müssen die Kisten haben, wenn möglichst wenig Pappkarton verbraucht werden soll?

