1 1. Nullstellen $x^2(x+5)=0$

wenn $\underline{\underline{x=0}}$ oder $\underline{\underline{x=-5}}$

- Asymptoten: Definitionslücken $\underline{\underline{x=1}}$, $\underline{\underline{x=3}}$

$$f(x)=\frac{-3}{5(x-1)}+\frac{36}{5(x-3)}+\frac{x}{5}+\frac{9}{5}$$

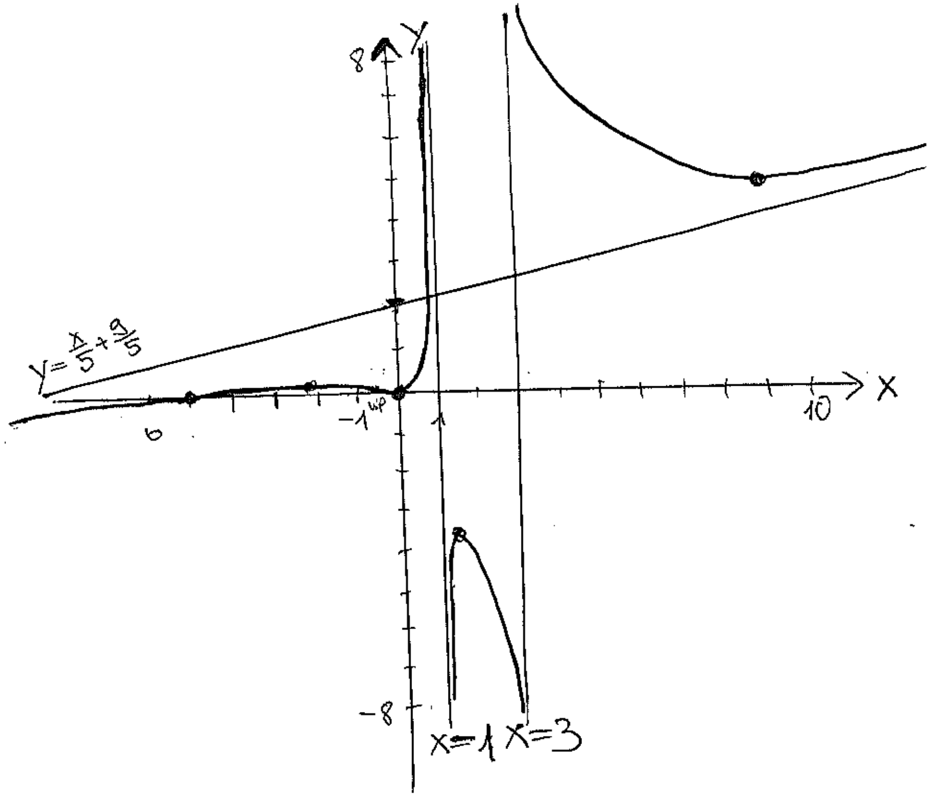
$\Rightarrow$ schiefe Asymptote bei $\underline{\underline{y=\frac{x}{5}+\frac{9}{5}}}$

2. Minima bei $(0|0)$, $(8.86|4.72)$

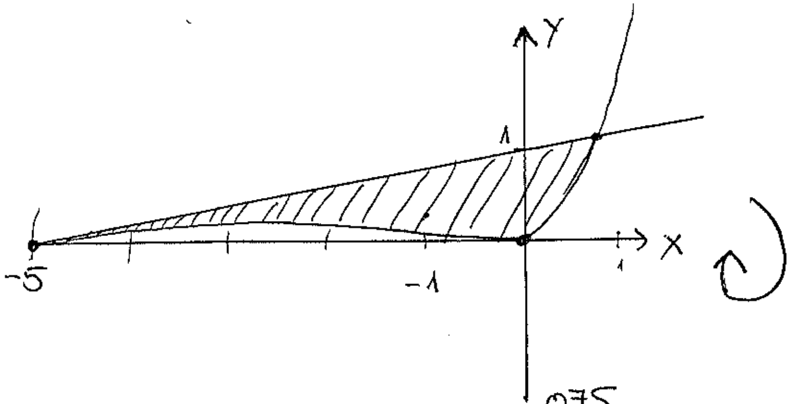
Maxima bei $(-2.32|0.16)$, $(1.46|-3.89)$

Wendepunkt bei $(-0.55|0.05)$

3.



4.



$$V_x=\pi\cdot\int_{-5}^{0.75}(0.2x+1)^2\,dx-\pi\int_{-5}^{0.75}[f(x)]^2\,dx$$

$$=\ 7.9633\ -\ 0.5125\ldots$$

$$=\underline{\underline{7{,}451}}$$

5. $$F'(x)=-\frac{1}{10}\left(6\cdot\frac{1}{x-1}-72\cdot\frac{1}{x-3}-\underbrace{\left[1(x+18)+x\cdot 1\right]}_{\text{Produktregel}}\right)$$

oder $[x(x+18)]'=[x^2+18x]'$
$=2x+18$

$$=-\frac{1}{10}\left(\frac{6}{x-1}-\frac{72}{x-3}-2x-18\right)$$

gleichnamig: $$-\frac{1}{10}\left(\frac{\cancel{6x-18}\cancel{-72x+72}-2x^3+8x^2\cancel{-6x}-18x^2\cancel{+72x-54}}{(x-1)(x-3)}\right)$$

$\left((x-1)(x-3)=x^2-4x+3\right)$ $$=-\frac{1}{10}\left(\frac{-2x^3-10x^2}{(x-1)(x-3)}\right)$$

$$=-\frac{1}{10}\left(\frac{-2x^2(x+5)}{(x-1)(x-3)}\right)=\frac{1}{5}\,\frac{x^2(x+5)}{(x-1)(x-3)}\ \checkmark$$

(2) 1. $h: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\0\\-2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

2. $g \cap h: \begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \longrightarrow \underline{t=-1}$

$x \Rightarrow 1-2 = 5+2s \Rightarrow \underline{s=-3}$

Probe: z: $-3+(-1)\cdot(-1) \overset{?}{=} 1-3$ ✓

$\Rightarrow \underline{\underline{S(-1|-5|-2)}}$

3. $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

$E: -x+2y+2z+D=0 \quad | \hookrightarrow (5|-5|1)$

$-5-10+2+D=0$

$D=13$

$\underline{\underline{E: -x+2y+2z+13=0}}$

4. $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}}{3\cdot\sqrt{5}}\right) = \arccos\left(\dfrac{3}{3\sqrt{5}}\right) = \underline{\underline{63{,}43°}}$

5. Ebene K durch C $\perp$ auf g: $\hookrightarrow C$

$2x+2y-z+D=0$

$4+2+2+D=0$

$D=-8 \qquad F: 2x+2y-z-8=0$

$g \cap K: 2(1+2t)+2(-3+2t)-(-3-t)-8=0$

$9t-9=0$

$t=1$

$\Rightarrow \underline{\underline{L(3|-1|-4)}}$

6. $\vec{n}_E = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ liegt in F

$\vec{GC} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$ " " "

$\Rightarrow \underline{\underline{F: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}}}$

oder $\vec{n}_F = \begin{pmatrix}-6\\3\\-6\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$

$2x-y+2z+D=0 \quad \hookrightarrow G$

$2+3-6+D=0$

$D=1 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{F: 2x-y+2z+1=0}}$

7. ΔGLC: $A = \frac{1}{2}\left|\vec{GL}\times\vec{GC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right|$

$= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}6\\-3\\6\end{pmatrix}\right| = \underline{4{,}5}$

$\Rightarrow$ Höhe von H über Ebene GLC muss $\frac{12}{4{,}5} = \frac{8}{3}$ betragen

Ebene GLC: $2x-y+2z+D=0 \quad | \hookrightarrow G$

(= Ebene F) $\quad 2+3-6+D=0$

$D=1$

Punkt auf h: $H(5+2t|-5|1+t)$

$\Rightarrow d(H, GLC) = \frac{8}{3} = \dfrac{2(5+2t)-(-5)+2(1+t)+1}{\underbrace{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}_{=3}} \quad | \cdot 3$

$8 = 10+4t+5+2+2t+1$

$-10 = 6t$

$-\frac{5}{3} = t \qquad \Rightarrow \underline{\underline{H(5/3|-5|-2/3)}}$

(3) 1. a) $5^6 = \underline{15'625}$

b) $6! \cdot 5^6 = \underline{11'250'000}$

↑ Reihenfolge der Zeilen

c) $\underbrace{10 \cdot 9 \cdot 8}_{\text{Drei Ziffern verschieden}} \cdot \underbrace{20 \cdot 19 \cdot 18}_{\text{Drei der 20 Buchstaben}} = \frac{10!}{(10-3)!} \cdot \frac{20!}{(20-3)!} =$

$\underline{4'924'800}$

d) Quersumme 8 lässt sich nur erstellen mit
- einer 3 und fünf 1 (A)
- zwei 2 und vier 1 (B)

(A): 6 Möglichkeiten (die 3 kann an einer der sechs Stellen stehen)

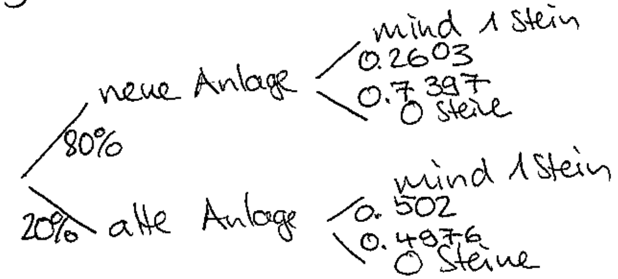
(B): $\binom{6}{2} = 15$ Mögl.kn (für die beiden 2 2 von 6 Positionen)

$\Rightarrow$ total $15 + 6 = \underline{21}$ Möglichkeiten

2. a) $B(30, 0.023, 0) = \underline{\underline{0.4976}}$

b) $\sum_{k=3}^{30} B(30, 0.023, k) = \underline{\underline{0,0311}}$

c)



P(mind 1 Stein) $= 80\% \cdot 0{,}2603 + 20\% \cdot 0{,}502$
$= \underline{\underline{0{,}3087}}$

d) P(alte Anlage | Kirschen entsteint) =

$$\frac{20\% \cdot 0{,}4976}{80\% \cdot 0{,}7397 + 20\% \cdot 0{,}4976} = \underline{\underline{0{,}1440}}$$

4) a) i) $H(0) = 0 + 0 + 0 + 1{,}8$ ✓

$H(15) = -0{,}0002 \cdot 15^4 + \ldots\ldots = 1{,}8$ ✓

ii) Max bei $(10{,}7 \mid 3{,}8)$ (Hochpunkt)

$t = 10.7359 = 10\,h \quad 44\,min$, also

um 10.44 Uhr

iii) Höchststand bei $3{,}838\,m$

$\Rightarrow \frac{3{,}838}{1{,}8} = 2{,}13 \mathrel{\hat=} 213\%$, also

um 113% mehr oder 213% des Normalstands

iv) beim Wendepunkt bei $(6.4 \mid 2{,}95)$

$\Rightarrow$ Um 6.24 Uhr

v) $\frac{1}{15} \cdot \int_0^{15} H(t)\,dt = \frac{1}{15} \cdot 43{,}03 \approx 2{,}87\,m$

vi) $H'(13) = -0{,}47\,\frac{m}{h}$

$\rightarrow$ Um 13.00 Uhr sinkt der Wasserstand mit einer Momentangeschwindigkeit von $-0.47\,\frac{m}{h}$

b) 8.00 Uhr $\mathrel{\hat=}$ $t = 0$ $\Rightarrow B(2) = 150'000 = 1000 \cdot q^2$

$\Rightarrow q = \sqrt{\frac{150'000}{100}} = 12{,}247\ldots$

$\rightarrow$ ges.: t mit $B(t) \geq 10^6$ (1 Mio)

$1000 \cdot 12{,}247^t = 10^6$

$t = \frac{\ln(1000)}{\ln(12{,}247)} = 2{,}75$

$\Rightarrow$ Nach 2,757 Stunden um 10.45 Uhr

c) Ansatz: $H(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$

$$\begin{array}{lll} ① & H(0) = 1{,}8 & \rightarrow \\ ② & H(8) = 1{,}6 & \rightarrow \\ \text{Min: } ③ & H'(8) = 0 & \rightarrow \\ ④ & H(12) = 1{,}8 & \end{array} \left| \begin{array}{r} d = 1{,}8 \\ 8^3 a + 8^2 b + 8c + d = 1{,}6 \\ 3 \cdot 8^2 \cdot a + 2 \cdot 8 \cdot b + c = 0 \\ 12^3 a + 12^2 b + 12c + d = 1{,}8 \end{array} \right|$$

$\downarrow$ TR

$$\left. \begin{array}{l} a = 0{,}00078125 \\ b = -0{,}009375 \\ c = 0 \\ d = 1{,}8 \end{array} \right\} H(t) = 0{,}00078125t^3 - 0{,}009375t^2 + 1{,}8$$

5)

a) Mittelpunkt der Wolke M(120|13|6)

Flugzeug F(118|15|5.5)

$$|\vec{MF}| = \left|\begin{pmatrix}-2\\2\\-0.5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2+2^2+(-0,5)^2} = 2,87$$

Dieser Abstand ist kleiner als 3 ⇒ Flugzeug befindet sich in der Wolke.

b) Ballon fliegt in Richtung $\begin{pmatrix}0\\3\\10\end{pmatrix}$

⇒ ges: t mit $\begin{pmatrix}120\\13\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\10\end{pmatrix}$

Punkt am Boden

$\Rightarrow 6 = 0 + t\cdot 10 \Rightarrow t = \frac{6}{10} = 0.6$

$\xrightarrow{t=0.6}$ $\begin{pmatrix}120\\13\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} + 0.6\begin{pmatrix}0\\3\\10\end{pmatrix}$ → $x=120$, → $y=11.2$ ✓

i) Von Punkt (120|11.2|0) aus

ii) Er muss 6km = 6000m steigen mit einer Geschw. von 10 m/s

$\Rightarrow t = 600\,s = 10\,min$

c) $$d(M,g) = \frac{\left|\begin{pmatrix}25\\-27\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\-3\\-0,2\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\-3\\-0,2\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3,6\\-7\\33\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{25,04}}$$

Aufpunktvektor M

$$= \frac{\sqrt{1150,96}}{\sqrt{25,04}} \approx 6,78$$ ⇒ keine Gefahr, da > 3km

d) i) Projektion entlang $s: \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120\\13\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-1\\-6\end{pmatrix}$

auf $E: x - y + 10z - 110 = 0$

↳ $(120+2t) - (13-t) + 10(6-6t) - 110 = 0$

$-57t + 57 = 0$

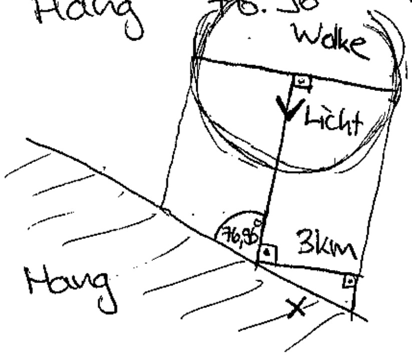
$t = 1$

↳ Schatten (122|12|0)

ii) $$\sin(\alpha) = \left|\frac{\begin{pmatrix}2\\-1\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{102}}\right| = \left|\frac{63}{\sqrt{41\cdot 102}}\right|$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{63}{\sqrt{41\cdot 102}}\right) = 76.96°$$

iii) Da der Winkel des Lichts zum Hang 76.96° beträgt, sieht es so aus:



es gilt:

$$\sin(76.96°) = \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{\sin(76.96°)} = 3,08\,km$$

⑥ 1.

X	0 gelb	1 gelb	2 gelb	3 gelb	4 gelb
P	1/39 0,256...	8/39 0,205	$\frac{28}{65}$ 0,43	$\frac{56}{195}$ 0,287	2/39 0,051

Wkn: total möglich: $\binom{15}{4}$

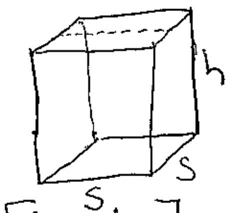
günstig: $\binom{7}{\text{Anz rote}} \cdot \binom{8}{\text{Anz gelbe}}$

zB. 3 gelbe (1 rote) $\quad p = \dfrac{\binom{7}{1}\binom{8}{3}}{\binom{15}{4}} = \dfrac{56}{195}$

$$E(X) = \frac{1}{39}\cdot 0 + \frac{8}{39}(1) + \frac{28}{65}\cdot(2) + \frac{56}{195}\cdot(3) + \frac{2}{39}(4)$$

$$= \frac{32}{15} = 2{,}1\overline{3}$$

2.



[in dm]

- Oberfläche = Menge Pappkarton

$$= \underbrace{2s^2}_{\text{Boden doppelt}} + \underbrace{s^2}_{\text{Deckel}} + \underbrace{4sh}_{\text{4 Seiten}} = 3s^2 + 4sh$$

Zielfunktion → minimieren

- Nebenbedingung: $V = s^2 h = 12\ dm^3$

nach h: $h = \frac{12}{s^2}$

- $h = \frac{12}{s^2}$ in Ziel: $3s^2 + 4s\cdot\frac{12}{s^2}$ minimal

$$P(s) = 3s^2 + 48\,s^{-1}$$

- Minimum: $P'(s) = 6s + 48\cdot(-s^{-2}) = 0 \quad |\cdot s^2$

$6s^3 - 48 = 0$

$s^3 = 8$

$s = 2$

$\Rightarrow$ $s = 2\,dm$ $\quad h = 3\,dm$