

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2006 MATHEMATIK – 3 Std.
Klasse 4 Ma – hcs

Hilfsmittel: Taschenrechner
 Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf eine separate, mit dem Namen beschriftete Seite zu lösen, rechts 2 cm Rand lassen.

Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.

Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.

Alle Aufgaben ergeben etwa gleich viele Punkte (nämlich ca. 10).

In der Regel ergeben 50 Punkte eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.

Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:

Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !

1) **Vektorgeometrie, 10 Punkte**

Gegeben sind der Punkt $P(-2|3|2)$, die Ebene $E: 5x - 10y + 8z - 20 = 0$ sowie die beiden

$$\text{Geraden } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (2.5 Punkte) Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h in einem Punkt S schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S .
- (1.5 Punkte) Bestimmen Sie den spitzen Schnittwinkel zwischen g und h .
- (1.5 Punkte) Die Ebene E' ist parallel zu E und geht durch den Punkt P . Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E' .
- (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.
- (2.5 Punkte) Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A , B und C . Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC .

2) **Analysis, 10.5 Punkte**

Gegeben ist die gebrochene rationale Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \frac{4}{x - 1}.$$

- a) (6.5 Punkte) Diskutieren Sie die Funktion $f(x)$. Gehen Sie dabei folgendermassen vor:
- i) Berechnen Sie den Definitionsbereich und die Grenzwerte bei den Definitionslücken.
 - ii) Beweisen Sie ohne Taschenrechner, dass die Funktion $f(x)$ keine Nullstellen besitzt.
 - iii) Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x)$ ohne den Taschenrechner.
 - iv) Berechnen Sie die Extrema mit dem Taschenrechner
 - v) Geben Sie die Gleichung der Asymptoten bei $x \rightarrow \pm \infty$ an.
 - vi) Skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf korrekte Krümmung, und zeichnen Sie die Asymptoten ein.
- b) (2 Punkte) Zeigen Sie anschaulich und übersichtlich, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -3x + 10$ eine Tangente des Graphen ist.
- c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen zwischen den Geraden $x = 2$ und $x = 4.5$ näherungsweise mit Hilfe von 5 gleich breiten Rechteckflächen, welche gerade noch unter dem Graphen liegen (Untersumme U_5)

3) **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, 10 Punkte**
(Runden Sie die Resultate sinnvoll!)

Eine Urne enthält eine weisse, zwei schwarze und drei rote Kugeln.

- a) (3 Punkte) Es werden nacheinander drei Kugeln **ohne** Zurücklegen entnommen.
- i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man die Zugreihenfolge "weiss - schwarz - rot"?
 - ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die drei gezogenen Kugeln verschiedenfarbig?
- b) (2 Punkte) Man zieht zwei Kugeln aus der Urne und stellt fest, dass beide gleichfarbig sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Kugeln rot?
- c) (3 Punkte) Man zieht nun so lange eine Kugel aus der Urne, bis man eine rote Kugel erhält. Wie lange muss man durchschnittlich in die Urne greifen?
- d) (2 Punkte) Es werden nun 10 Kugeln **mit** Zurücklegen entnommen.
- i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man höchstens ein Mal eine weisse Kugel?
 - ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens 8 Mal eine rote Kugel?

4) Vektorgeometrie, 11 Punkte

Zwei Nachbarn streiten sich darum, ob ein Baum den Mindestabstand von 5m zur Grenze einhält. Die Wurzelbasis (also der Punkt, an dem der Baum aus der Erde kommt) liegt bei $W(7|-11.5|3)$, die Spitze bei $S(7|-11.5|7)$.

Wegen der Lage an einem Hang können sich die beiden nicht einigen, wie der Abstand zu messen sei.

Ihre Grundstücksgrenze verläuft am Boden entlang der Geraden g durch die Punkte $G_1(0|0|0)$ und $G_2(24|-18|4)$.

(Eine Einheit entspricht einem Meter)

- a) (2 Punkte) Der erste Nachbar misst den Abstand der Wurzel W des Baums zur Grenzgeraden g am Boden. Wie gross ist dieser Abstand?
- b) Der zweite Nachbar meint, man müsse nicht entlang des Hangs messen, da dort das Gefälle mitgemessen wird. Stattdessen misst er den Abstand von der Baumspitze S zu einer Grenzebene, welche parallel zum Baumstamm liegt und die Grenzgerade beinhaltet.
- i) (2 Punkte) Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Grenzebene E , welche die Grenzpunkte G_1 und G_2 beinhaltet und parallel zum Baumstamm liegt.
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit $E: 4.5x + 6y = 0$)
- ii) (1 Punkt) Wie gross ist der Abstand der Baumspitze S zur Grenzebene E ?
- iii) (1.5 Punkte) Nachbar A steht auf seinem Grundstück an der Stelle $A(18|-12|2.56)$. Begründen Sie rechnerisch, ob er auf dem gleichen Grundstück wie der Baum steht.
- c) Um seinen Nachbarn zu ärgern, will der erste eine Fahnenstange genau gegenüber des Nachbarbaums aufstellen.
- i) (2.5 Punkte) Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes von S bezüglich der Grenzebene E , an welchem die Spitze der Fahnenstange sein soll.
- ii) (2 Punkte) In welchem Punkt muss er die Fahnenstange in den Boden rammen, wenn man annimmt, dass der Hang vollkommen eben ist?

5) Analysis, 10 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{a^2}(-x^3 + ax^2 - 3x^2 + 3ax)$ mit dem positiven Parameter a .

- a) (2 Punkte) Bestimmen Sie a so, dass der Wendepunkt von $f(x)$ bei $x = 5$ liegt.
Lösen Sie diese Aufgabe ohne Taschenrechner.
- b) (1 Punkte) Zeigen Sie, dass $f(x)$ die Nullstellen $x = -3$, $x = 0$ und $x = a$ besitzt.
- c) (1.5 + 2 Punkte, wenn Sie die Integrale und Gleichungen ohne Taschenrechner lösen)
Bestimmen Sie a so, dass die Fläche, welche der Graph von $f(x)$ im 1. Quadranten mit der x -Achse einschliesst, 11.25 beträgt.
- d) (3.5 Punkte) Es sei nun $a = 5$. In die Fläche, welche der Graph von $f(x)$ im 1. Quadranten mit der x -Achse einschliesst, soll ein möglichst grosses Dreieck mit folgenden Eigenschaften einbeschrieben werden:
–Die Ecke A liegt auf dem Graphen von $f(x)$ und oberhalb der x -Achse
–Die Ecke B liegt im Nullpunkt $(0|0)$
–Die Ecke C mit dem rechten Winkel liegt auf der x -Achse

6) **3 unabhängige Aufgaben, 10.5 Punkte**a) **(3 Punkte) Statistische Masszahlen**

Bei der Maturaprüfung einer Kantonsschule sind die Schülerinnen und Schüler nicht alle gleich alt. Folgende Tabelle gibt darüber Aufschluss:

Alter	17	18	19	20	21
Anzahl Schülerinnen und Schüler	1	42	31	5	4

Berechnen Sie das durchschnittliche Alter und die Standardabweichung des Alters aller Maturanden.

b) **(3.5 Punkte) Statistischer Test**

Ein Abnehmer von Bauteilen, die mit der Fehlerquote 10% geliefert werden, hat den Verdacht, dass diese höher liegt. Er testet 100 Bauteile.

Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich V , wenn ein Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) von 3 % zugrunde gelegt wird. Wie lautet das Urteil, wenn 19 der 100 getesteten Teile defekt sind ?

c) **(4 Punkte) exponentielles Wachstum**

In einem Land werden 1000 Kaninchen ausgesetzt, welche sich derart vermehren, dass ihr Bestand jeden Monat um 3% zunimmt.

Die Kaninchen fressen den einheimischen Faultieren die ganze Nahrung weg. Hatte es beim Aussetzen der Kaninchen noch 300'000 Faultiere, so sind es nach 5 Monaten nur noch deren 285'000.

Nach wie vielen Jahren wird es gleich viele Kaninchen wie Faultiere haben, wenn die Abnahme- bzw. Zuwachsraten konstant bleiben?

Lösen Sie die Gleichungen ohne den Befehl *Löse(..)* des Taschenrechners.

Viel Glück !