MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2006 MATHEMATIK – 3 Std.
Klasse 4 Ma – hcs

Lösungen: (**Die Aufgaben sind fett**, die Lösungen normal geschrieben.)

1) **Vektorgeometrie, 10 Punkte**

Gegeben sind der Punkt P(–2|3|2), die Ebene E: 5x – 10y + 8z – 20 = 0 sowie die beiden Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ **und h:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) ***(2.5 Punkte)*** **Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h in einem Punkt S schneiden. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S.**

Setze die Gleichungen gleich: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Alle drei Gleichungen müssen erfüllt sein. So liefert der Taschenrechner die Lösungens = 1 und t = –2. Durch Einsetzen in alle drei Gleichungen beweist man, dass sich die geraden schneiden. Beim Einsetzen erhält man den Schnittpunkt S(0|2|5).

) ***(1.5 Punkte)*** **Bestimmen Sie den spitzen Schnittwinkel zwischen g und h.**

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{14}} \right| = 0.0433 \Rightarrow \alpha = \arccos(0.0433) = \underline{\underline{87.52°}}$$

c) ***(1.5 Punkte)*** **Die Ebene E' ist parallel zu E und geht durch den Punkt P. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E'.**

Da die Ebenen parallel sein sollen, müssen ihre Normalenvektoren kollinear sein. Man kann für E' den gleichen Normalenvektor nehmen und den Ansatz für die Koordinatengleichung aufstellen: E': 5x – 10y + 8z + D = 0.
D bestimmt man durch Einsetzen des Punktes P, welcher auf der Ebene liegen muss:
$-10 - 30 + 16 + D = 0 \;\Rightarrow\; D = 24 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{E': 5x - 10y + 8z + 24 = 0}}$.

d) ***(2 Punkte)*** **Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene E liegt.**

Erstens muss die Richtung (Richtungsvektor) der Geraden in der Ebene liegen, also senkrecht zum Normalenvektor stehen (das heisst ihr Skalarprodukt ist 0):

$$\overrightarrow{n_E} \cdot \overrightarrow{u_g} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -10 - 30 + 40 = 0 \quad \Rightarrow \text{ok}$$

Zweitens muss noch irgendein Punkt der Geraden in der Ebene liegen, z.B. der Aufpunkt von g:

$$5 \cdot (2) - 10 \cdot (-1) + 8 \cdot (0) - 20 = 0 \quad \Rightarrow \text{ok}$$

e) ***(2.5 Punkte)*** **Die Ebene E schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten A, B und C. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.**

Ein Punkt auf der x–Achse hat die Koordinaten (x|0|0) (also y und z sind 0). Setzt man dies in die Ebenengleichung ein, so bekommt man: $5x - 0 + 0 - 20 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$
Ebenso erhält man die Punkte auf den anderen beiden Achsen: B(0|–2|0), C(0|0|2.5)

Die Fläche des Dreiecks kann man mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt) berechnen:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-5)^2 + 10^2 + (-8)^2} = \underline{\underline{6.87}}$$

2) **Analysis, 10.5 Punkte**
Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion mit der Gleichung

$$\mathbf{f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \frac{4}{x - 1}.}$$

a) ***(6.5 Punkte)*** **Diskutieren Sie die Funktion f(x). Gehen Sie dabei folgendermassen vor:**

i) **Berechnen Sie den Definitionsbereich und die Grenzwerte bei den Definitionslücken.**

Nullstelle des Nenners bei $x - 1 = 0$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 1 - 2 + \frac{\text{ungefähr } 4}{\text{fast } 0, \text{ aber sicher negativ}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 1 - 2 + \frac{\text{ungefähr } 4}{\text{fast } 0, \text{ aber sicher positiv}} = \infty$$

ii) **Beweisen Sie ohne Taschenrechner, dass die Funktion f(x) keine Nullstellen besitzt.**

Wenn $f(x) = 0$ gelten soll, so müsste $x^2 - 3x + 6 = 0$ sein. Dies ist eine quadratische Gleichung, die Anwendung der Lösungsformel führt zu: $x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 24}}{2}$.
Da die Diskriminante (der Wurzelinhalt) negativ ist, hat die Gleichung keine Lösung.

iii) **Berechnen Sie die erste Ableitung von f(x) ohne den Taschenrechner.**

Anwendung der Quotientenregel: $f'(x) = \frac{(2x - 3) \cdot (x - 1) - \left[(x^2 - 3x + 6) \cdot 1\right]}{(x - 1)^2}$

iv) **Berechnen Sie die Extrema mit dem Taschenrechner**

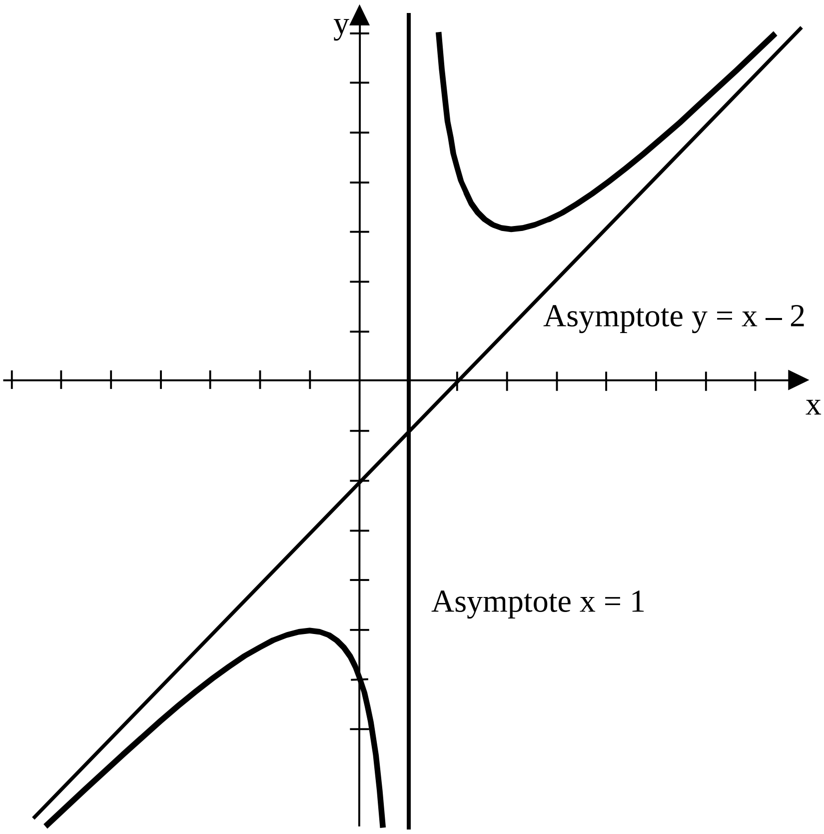
Max(–1|–5), Min(3|3)

v) **Geben Sie die Gleichung der Asymptoten bei $x \to \pm\infty$ an.**

Bei der Funktionsgleichung gilt: $f(x) = x - 2 + \underbrace{\frac{4}{x-1}}_{\to 0,\text{ wenn } x \to \infty \text{ geht}}$

$\Rightarrow$ Asymptotengleichung: $y = x - 2$

vi) **Skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf korrekte Krümmung, und zeichnen Sie die Asymptoten ein.**



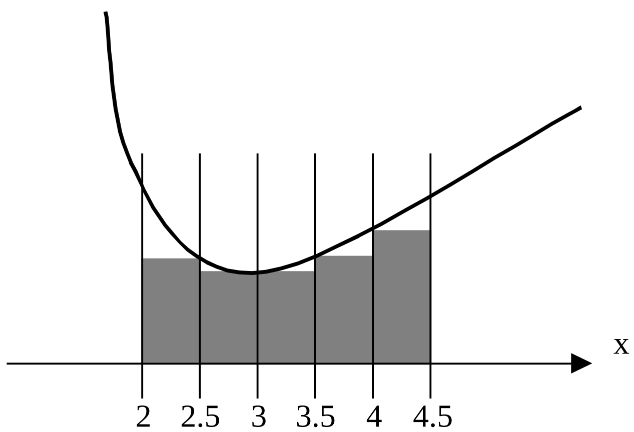
b) ***(2 Punkte)*** **Zeigen Sie anschaulich und übersichtlich, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -3x + 10$ eine Tangente des Graphen ist.**

Erstens müssen Tangente und Graph einen gemeinsamen Punkt besitzen, man setzt dazu die Funktionsgleichungen gleich: $\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = -3x + 10 \Rightarrow x = 2$ und durch Einsetzen erhält man den y–Wert y = 4.
Zweitens muss in diesem Punkt (2|4) der Graph die gleiche Steigung wie die Tangente besitzen, nämlich m = –3. Dies überprüft man, indem man in die erste Ableitung der Funktion f(x) für x = 2 einsetzt:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x-1) - \left[(x^2 - 3x + 6)\cdot 1\right]}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{(1)\cdot(1) - \left[(4)\cdot 1\right]}{(1)^2} = -3 \Rightarrow \text{ ok}$$

c) ***(2 Punkte)*** **Berechnen Sie die Fläche unter dem Graphen zwischen den Geraden $x = 2$ und $x = 4.5$ näherungsweise mit Hilfe von 5 gleich breiten Rechteckflächen, welche gerade noch unter dem Graphen liegen (Untersumme U_5)**

In der Skizze sieht man, dass (3|3) ein Minimum ist. Deswegen muss man die Höhe der Balken entsprechend wählen. Die Breite der Balken beträgt 0.5.
$U_5 = 0.5\cdot[f(2.5) + f(3) + f(3) + f(3.5) + f(4)] = 0.5\cdot(3.1\overline{6} + 3 + 3 + 3.1 + 3.\overline{3}) = \underline{\underline{7.8}}$



3) **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, 10 Punkte**
(Runden Sie die Resultate sinnvoll!)

Eine Urne enthält eine weisse, zwei schwarze und drei rote Kugeln.

a) ***(3 Punkte)*** **Es werden nacheinander drei Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.**

i) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man die Zugreihenfolge "weiss - schwarz - rot"?**

Zu Beginn sind es 6 Kugeln, davon ist eine weiss $\Rightarrow p = \frac{1}{6}$
von den verbleibenden 5 Kugeln sind zwei schwarz $\Rightarrow p = \frac{2}{5}$
von den verbleibenden 4 Kugeln sind drei rot $\Rightarrow p = \frac{3}{4}$
Diese Wahrscheinlichkeiten werden multipliziert, da man die Ziehungen hintereinander ausführt und diese zusammen gehören: $p = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{20} = \underline{\underline{0.05}}$

ii) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die drei gezogenen Kugeln verschiedenfarbig?**

1.Weg: Man zeichnet einen Baum (aufwändig) und findet die 6 Möglichkeiten verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen. Diese Wege haben alle die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{20}$. Da es total 6 Wege sind ist P(3 verschiedene) = $6\cdot\frac{1}{20} = \underline{\underline{0.3}}$

2.Weg: man ignoriert die Reihenfolge der Ziehung, total sind dann 3 aus 6 Kugeln zu ziehen, was auf $\binom{6}{3} = 20$ Arten geht. Die günstigen Fälle davon sind: eine von einer weissen, eine von zwei schwarzen und eine von drei roten Kugeln zu ziehen, also $1\cdot2\cdot3 = 6$ Möglichkeiten.
Die Division günstige durch mögliche Fälle ergibt: $\frac{6}{20} = \underline{\underline{0.3}}$

b) ***(2 Punkte)*** **Man zieht zwei Kugeln aus der Urne und stellt fest, dass beide gleichfarbig sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind die beiden Kugeln rot?**

Bedingte Wahrscheinlichkeit: P(2 rote|2 gleiche). 2 gleiche Kugeln geht nur mit zwei roten oder mit zwei schwarzen Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit für zwei rote beträgt $\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ (im ersten Zug sind 3 rote möglich von 6 Kugeln insgesamt, im zweiten Zug verbleiben noch zwei rote von insgesamt 5 Kugeln.)
Analog beträgt die Wahrscheinlichkeit für zwei schwarze Kugeln $\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$

$$\Rightarrow P(2\text{ rote}|2\text{ gleiche}) = \frac{P(2\text{ rote})}{P(2\text{ gleiche})} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}} = \underline{\underline{0.75}}$$

c) ***(3 Punkte)*** **Man zieht nun so lange eine Kugel aus der Urne, bis man eine rote Kugel erhält. Wie lange muss man durchschnittlich in die Urne greifen?**

Es sei X die Anzahl Züge, bis eine rote Kugel gezogen wird.

X =	1	2	3	4
Ereignisse	rot beim ersten Zug	nicht rot, dann rot	2mal nicht rot, dann rot	3mal nicht rot, dann geht nur noch rot
Wahrschein--lichkeit	$\frac{3}{6}$ $= 0.5$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}$ $= 0.3$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ $= 0.15$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}$ $= 0.05$

Der Erwartungswert beträgt: $E(X) = 0.5\cdot 1 + 0.3\cdot 2 + 0.15\cdot 3 + 0.05\cdot 4 = \underline{\underline{1.75 \text{ (Mal)}}}$

d) ***(2 Punkte)*** **Es werden nun 10 Kugeln mit Zurücklegen entnommen.**

i) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man höchstens ein Mal eine weisse Kugel?**

Bernoulli–Experiment mit n = 10, p = $\frac{1}{6}$, $k \le 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{1} B(10,\frac{1}{6};k) = \underline{\underline{0.485}}$

ii) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens 8 Mal eine rote Kugel?**

Bernoulli–Experiment mit n = 10, p = $\frac{1}{2}$, $k \ge 8 \Rightarrow \sum_{k=8}^{10} B(10,\frac{1}{2};k) = \underline{\underline{0.055}}$

4) **Vektorgeometrie, 11 Punkte**
Zwei Nachbarn streiten sich darum, ob ein Baum den Mindestabstand von 5m zur Grenze einhält. Die Wurzelbasis (also der Punkt, an dem der Baum aus der Erde kommt) liegt bei W(7|–11.5|3), die Spitze bei S(7|–11.5|7).
Wegen der Lage an einem Hang können sich die beiden nicht einigen, wie der Abstand zu messen sei.
Ihre Grundstücksgrenze verläuft am Boden entlang der Geraden g durch die Punkte G_1(0|0|0) und G_2(24|–18|4).
(Eine Einheit entspricht einem Meter)

a) ***(2 Punkte)*** **Der erste Nachbar misst den Abstand der Wurzel W des Baums zur Grenzgeraden g am Boden. Wie gross ist dieser Abstand?**

Abstand Punkt W zur Geraden durch G_1 und G_2: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix}$:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{G_1W} \times \overrightarrow{G_1G_2}\right|}{\left|\overrightarrow{G_1G_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 7 \\ -11.5 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 44 \\ 150 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{916}} = \underline{\underline{5.172\text{ m}}}$$

b) **Der zweite Nachbar meint, man müsse nicht entlang des Hangs messen, da dort das Gefälle mitgemessen wird. Stattdessen misst er den Abstand von der Baumspitze S zu einer Grenzebene, welche parallel zum Baumstamm liegt und die Grenzgerade beinhaltet.**

i) ***(2 Punkte)*** **Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Grenzebene E, welche die Grenzpunkte G_1 und G_2 beinhaltet und parallel zum Baumstamm liegt.**
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit E: 4.5x + 6y = 0)

Für den Normalenvektor braucht man zwei Richtungsvektoren der Ebene. Entlang der Grenze liegt der eine, der Baum selbst ist der andere Vektor.

$\Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{G_1G_2} \times \overrightarrow{WS} = \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -72 \\ -96 \\ 0 \end{pmatrix}$, welcher kollinear zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Ansatz: 3x + 4y + D = 0. Da der Punkt G_1 auf der Ebene liegt, folgt D = 0 und damit:
$\underline{\underline{E: 3x + 4y = 0}}$

ii) ***(1 Punkt)*** **Wie gross ist der Abstand der Baumspitze S zur Grenzebene E?**

Abstandsformel Punkt Ebene: $d(S,E) = \dfrac{3 \cdot (7) + 4 \cdot (-11.5)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = (-)\underline{\underline{5\text{ m}}}$

iii) ***(1.5 Punkte)*** **Nachbar A steht auf seinem Grundstück an der Stelle A(18|–12|2.56). Begründen Sie rechnerisch, ob er auf dem gleichen Grundstück wie der Baum steht.**

Abstandsformel Punkt Ebene: $d(A,E) = \dfrac{3\cdot(18)+4\cdot(-12)}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = (+)1.2\text{ m}$

Da die HNF verschiedene Vorzeichen für die Abstände von S und A liefert, steht der Nachbar A auf der anderen Seite der Grenzebene E.

c) **Um seinen Nachbarn zu ärgern, will der erste eine Fahnenstange genau gegenüber des Nachbarbaums aufstellen.**

i) ***(2.5 Punkte)*** **Bestimmen Sie die Koordinaten des Spiegelpunktes von S bezüglich der Grenzebene E, an welchem die Spitze der Fahnenstange sein soll.**

Die Lotgerade durch S auf E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -11.5 \\ 7 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ wird mit der Ebene E geschnitten:

$3\cdot(7 + 3t) + 4\cdot(-11.5 + 4t) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$ Schnittpunkt ist F(10|–7.5|7)

Um den Spiegelpunkt S' zu bekommen, muss man an den Schnittpunkt F den Vektor $\overrightarrow{SF}$ anhängen: $\overrightarrow{OS'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 10 \\ -7.5 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ S'(13|–3.5|7).

ii) ***(2 Punkte)*** **In welchem Punkt muss er die Fahnenstange in den Boden rammen, wenn man annimmt, dass der Hang vollkommen eben ist?**

Der Hang ist eine Ebene H, in welcher die Punkte G_1, G_2 und W liegen. Die Koordinatengleichung von H muss zuerst berechnet werden:

$\overrightarrow{n_H} = \overrightarrow{G_1G_2} \times \overrightarrow{G_1W} = \begin{pmatrix} 24 \\ -18 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ -11.5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -44 \\ -150 \end{pmatrix}$, welcher kollinear zu $\begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ 75 \end{pmatrix}$ ist.

$\Rightarrow$ Ansatz für H: $4x + 22y + 75z + D = 0$. Da wiederum (0|0|0) auf der Ebene H liegt, ist $D = 0 \Rightarrow$ H: $4x + 22y + 75z = 0$.

Da die Fahnenstange parallel zur z–Achse (also senkrecht auf dem Boden) steht, muss der Bodenpunkt die gleichen x– und y– Koordinaten wie die Spitze (13|–3.5|7) haben: Der Bodenpunkt hat also die Koordinaten (13|–3.5|z) und muss auf H liegen. Um z herauszufinden, setzt man in die Gleichung von H ein:

$4\cdot(13) + 22\cdot(-3.5) + 75\cdot z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Im Punkt $(13\,|\,-3.5\,|\,\frac{1}{3})$

5) **Analysis, 10 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{a^2}\left(-x^3 + ax^2 - 3x^2 + 3ax\right)$ mit dem positiven Parameter a.

a) ***(2 Punkte)*** **Bestimmen Sie a so, dass der Wendepunkt von f(x) bei x = 5 liegt.**
Lösen Sie diese Aufgabe ohne Taschenrechner.

Dann ist die zweite Ableitung Null: f''(5) = 0

$f'(x) = \frac{1}{a^2}\left(-3x^2 + 2ax - 6x + 3a\right)$

$f''(x) = \frac{1}{a^2}\left(-6x + 2a - 6\right)$

$f''(5) = \frac{1}{a^2}\left(-6 \cdot 5 + 2a - 6\right) = 0$ Multipliziert man beide Seiten mit a^2 so bekommt man:

$-36 + 2a = 0$ und damit $\underline{\underline{a = 18}}$

b) ***(1 Punkte)*** **Zeigen Sie, dass f(x) die Nullstellen x = –3 , x = 0 und x = a besitzt.**

Man setzt die 3 Werte in die Funktionsgleichung ein und prüft nach, dass immer f(x) = 0 herauskommt.

c) ***(1.5 + 2 Punkte, wenn Sie die Integrale und Gleichungen ohne Taschenrechner lösen)***
Bestimmen Sie a so, dass die Fläche, welche der Graph von f(x) im 1. Quadranten mit der x–Achse einschliesst, 11.25 beträgt.

Die Nullstellen sind im 1. Quadranten 0 und a. Damit ist die gesuchte Fläche:

$\int_0^a f(x)\,dx = 11.25$ und $\int_0^a f(x)\,dx = \left[\frac{1}{a^2}\left(-\frac{x^4}{4} + a\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^3}{3} + 3a\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^a =$

$\frac{1}{a^2}\left(-\frac{a^4}{4} + a\frac{a^3}{3} - 3\frac{a^3}{3} + 3a\frac{a^2}{2}\right) - 0 = -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3} - 3\frac{a}{3} + 3\frac{a}{2}$, was gleich 11.25 sein muss

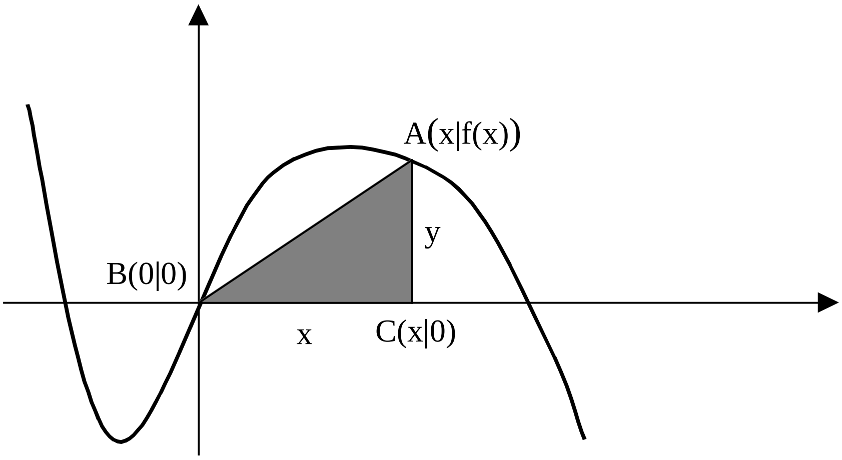
$\Rightarrow$ Man bekommt eine quadratische Gleichung $\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{2}a - 11.25 = 0$ bzw.

$$a^2 + 6a - 135 = 0$$

Lösungsformel $a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 540}}{2} = \frac{-6 \pm 24}{2} = \left\langle \begin{matrix} -15 \\ 9 \end{matrix} \right.$

Da die Lösung positiv sein muss (1. Quadrant), ist $\underline{\underline{a = 9}}$

d) ***(3.5 Punkte)*** **Es sei nun a = 5. In die Fläche, welche der Graph von f(x) im 1. Quadranten mit der x–Achse einschliesst, soll ein möglichst grosses Dreieck mit folgenden Eigenschaften einbeschrieben werden:**
–Die Ecke A liegt auf dem Graphen von f(x) und oberhalb der x–Achse
–Die Ecke B liegt im Nullpunkt (0|0)
–Die Ecke C mit dem rechten Winkel liegt auf der x–Achse



In der Skizze sieht man, dass die Fläche (Zielfunktion) des Dreiecks A = $\frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot x \cdot f(x)$ beträgt (also $\frac{1}{2} \cdot$ Kathete $\cdot$ Kathete)

Setzt man die Funktionsgleichung (mit a = 5) ein, so erhält man:

$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{1}{25}\left(-x^3 + 5x^2 - 3x^2 + 15x\right)$

Das Maximum dieser Funktion liegt bei <u>x = 3.589</u>

(Die erste Ableitung ist $A'(x) = \frac{1}{50}\left(-4x^3 + 6x^2 + 30x\right)$ und diese ist gleich 0 für
x = 0 (Minimum)
x = –2.09 (ausserhalb des Bereichs)
x = 3.589 (Lösung)

6) **3 unabhängige Aufgaben, 10.5 Punkte**

(3 Punkte) **Statistische Masszahlen**

Bei der Maturaprüfung einer Kantonsschule sind die Schülerinnen und Schüler nicht alle gleich alt. Folgende Tabelle gibt darüber Aufschluss:

Alter	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**
Anzahl Schülerinnen und Schüler	**1**	**42**	**31**	**5**	**4**

a) **Berechnen Sie das durchschnittliche Alter und die Standardabweichung des Alters aller Maturanden.**

$$\bar{x} = \frac{1\cdot 17 + 42\cdot 18 + 31\cdot 19 + 5\cdot 20 + 4\cdot 21}{1+42+31+5+4} = \underline{\underline{18.6265}}$$

$$s = \sqrt{\frac{1\cdot(17-\bar{x})^2 + 42\cdot(18-\bar{x})^2 + 31\cdot(19-\bar{x})^2 + 5\cdot(20-\bar{x})^2 + 4\cdot(21-\bar{x})^2}{1+42+31+5+4}} = \underline{\underline{0.81715}}$$

was gleich ist wie

$$s = \sqrt{\frac{1\cdot 17^2 + 42\cdot 18^2 + 31\cdot 19^2 + 5\cdot 20^2 + 4\cdot 21^2}{1+42+31+5+4} - \bar{x}^2} = \underline{\underline{0.81715}}$$

oder $s = \dfrac{1\cdot(\bar{x}-17) + 42\cdot(\bar{x}-18) + 31\cdot(19-\bar{x}) + 5\cdot(20-\bar{x}) + 4\cdot(21-\bar{x})}{1+42+31+5+4} = \underline{\underline{0.67325}}$

b) ***(3.5 Punkte)*** **Statistischer Test**

Ein Abnehmer von Bauteilen, die mit der Fehlerquote 10% geliefert werden, hat den Verdacht, dass diese höher liegt. Er testet 100 Bauteile.

Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich V, wenn ein Signifikanzniveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) von 3 % zugrunde gelegt wird. Wie lautet das Urteil, wenn 19 der 100 getesteten Teile defekt sind ?

Nullhypothese: $p_0 = 10\%$, Gegenhypothese: $p > 10\%$

Der Fehler 1.Art tritt ein, wenn der Abnehmer die Fehlerquote grösser als 10% einstuft, obwohl diese genau 10% wäre. Falls er die Bauteile ab X defekten Teile als mit über 10% Fehlerquote bezeichnet, begeht er einen Fehler 1. Art mit einer Wahrscheinlichkeit von:

$$\sum_{k=X}^{100} B(100, 0.1; k)$$

Für X = 17 ist dieser Fehler erstmals kleiner als 3%, nämlich 0.0206 (bei X = 16 ist er 0.04)

<u>Der Verwerfungsbereich ist also das Intervall [17,100]</u>.

Da 19 in diesem Intervall liegt, <u>kann er die Bauteile als mit einer höheren Fehlerquote als 10% bezeichnen</u> (er begeht dabei einen Fehler von 0.0046 = 0.46%)

c) ***(4 Punkte)*** **exponentielles Wachstum**
In einem Land werden 1000 Kaninchen ausgesetzt, welche sich derart vermehren, dass ihr Bestand jeden Monat um 3% zunimmt.
Die Kaninchen fressen den einheimischen Faultieren die ganze Nahrung weg. Hatte es beim Aussetzen der Kaninchen noch 300'000 Faultiere, so sind es nach 5 Monaten nur noch deren 285'000.
Nach wie vielen Jahren wird es gleich viele Kaninchen wie Faultiere haben, wenn die Abnahme– bzw. Zuwachsraten konstant bleiben?
Lösen Sie die Gleichungen ohne den Befehl Löse(..) des Taschenrechners.

Es sei t die Zeit in Monaten.
Die Kaninchen vermehren sich nach der Gleichung $B(t) = 1000 \cdot 1.03^t$
Bei den Faultieren muss zunächst der Wachstums– bzw. Zerfallsfaktor q berechnet werden:
$B(t) = 300'000 \cdot q^t$, da nach 5 Monaten nur noch 285'000 Faultiere existieren, gilt:
$285'000 = 300'000 \cdot q^5$
Diese Gleichung wird durch 285'000 dividiert und dann wird die 5. Wurzel gezogen:
$q = \left(\frac{285'000}{300'000}\right)^{\frac{1}{5}} = 0.98979...$ (mit gespeichertem Wert weiterrechnen!!!)
Damit nimmt der Faultierbestand nach der Gleichung $B(t) = 300'000 \cdot 0.98979...^t$ ab.
Um den Zeitpunkt t herauszufinden, nach dem es gleich viele Tiere beider Sorten hat, muss man die Gleichungen gleichsetzen:
$1000 \cdot 1.03^t = 300'000 \cdot 0.98979...^t$ Die Division durch 1000 und durch $0.98979...^t$ ergibt:
$\left(\frac{1.03}{0.98979...}\right)^t = 300$ Logarithmieren führt zu:
$t \cdot \ln\left(\frac{1.03}{0.98979...}\right) = \ln(300)$ Die Division durch $\ln\left(\frac{1.03}{0.98979...}\right)$ ergibt mit dem Taschenrechner:
t = 143.25 Monate, also <u>nach ca. 12 Jahren.</u>