Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung DMK oder Fundamentum Mathematik und Physik

Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf eine separate, mit dem Namen beschriftete Seite zu lösen, rechts 2 cm Rand lassen.
Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
Alle Aufgaben ergeben etwa gleich viele Punkte (nämlich ca. 10).
In der Regel ergeben 50 Punkte eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.
Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:
Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !

1) **Analysis, 13 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x - 18}{x^2}$.

a) *(5 Punkte)* Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu:

i) den Definitionsbereich

ii) die Nullstellen

iii) die erste Ableitung ohne Taschenrechner und mit deren Hilfe die Extrema

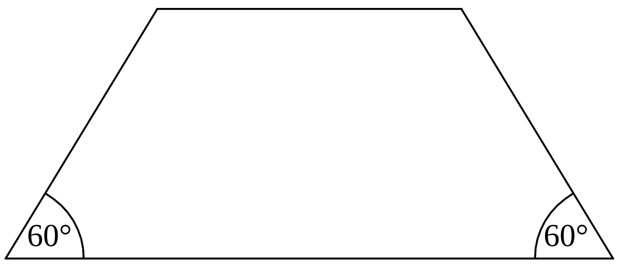
iv) die Grenzwerte bei den Definitionslücken und bei $x \to \pm\infty$

v) die Gleichungen der Asymptoten

vi) Skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf korrekte Krümmung, und zeichnen Sie die Asymptoten ein.

b) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt (0|0) aus an den Graphen von f(x) im 1. Quadranten (auf drei Stellen nach dem Komma runden).

c) *(5 Punkte)* **Extremalwertaufgabe**
Ein Luftschacht soll im Querschnitt (Bild rechts) die Form eines gleichschenkligen Trapezes mit Basiswinkeln von 60° haben und eine Querschnittsfläche von 15 m^2 besitzen. Wie muss man die Abmessungen des Querschnitts wählen, damit dieser einen möglichst kleinen Umfang hat?



2) **Vektorgeometrie, 10 Punkte**
Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte A(–1|4|2), B(1|0|2) und C(1|–4|4), sowie die Gerade g durch die Punkte G(2|6|7) und H(–4|9|–2).

a) *(1.5 Punkte)* Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.

b) *(1.5 Punkte)* Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der xz–Ebene.

c) *(2 Punkte)* Finden Sie die Gleichung einer Geraden h, welche die Geraden g in einem beliebigen Punkt rechtwinklig schneidet (nur eine Lösung angeben).

d) *(2.5 Punkte)* Welche Punkte auf der y–Achse haben von der xz–Ebene und der Ebene E den gleichen Abstand?

e) *(2.5 Punkte)* Finden Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und F. Die Ebene F steht senkrecht auf E und enthält die Gerade g. Welche spezielle Lage hat diese Schnittgerade?

3) **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, 9.5 Punkte**
(Runden Sie die Resultate auf drei Stellen nach dem Komma!)

a) *(3.5 Punkte)* In einer Rundfunksendung sind 30% aller gespielten Titel Oldies. Die Reihenfolge, in der die Titel abgespielt werden, wird nach dem Zufallsprinzip von einem Computer festgelegt.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 15 gespielten Titeln mindestens 3 Oldies vorkommen?

ii) Ein Hörer freut sich auf die Oldies. Wie viele Lieder muss er mindestens anhören, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% mindestens 6 Oldies hören kann?

b) *(3 Punkte)* Ein Moderator lässt die Hörer über Internet das Programm der nächsten Stunde bestimmen. Dabei können die Zuhörer Titel aus einer Liste mit 50 Liedern aus den 80-iger Jahren und 30 Liedern aus den 60-iger Jahren zufällig wählen.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von total 25 ausgewählten Liedern genau 15 Titel aus den 80-iger und 10 aus den 60-iger Jahren vorkommen?

ii) Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, in welcher der Moderator diese 25 Titel abspielen kann?

c) *(3 Punkte)* Das Risiko, dass ein Auto auf dem Parkplatz des Radiosenders aufgebrochen wird, beträgt nach Installation einer Überwachungskamera nur noch 2%. Trotzdem lässt der vorsichtige Discjockey eine Warnanlage in seinen Wagen einbauen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% einen Alarm auslöst, wenn der Wagen aufgebrochen wird. Die Warnanlage ist allerdings so sensibel eingestellt, dass sie auch durch eine unvorsichtige Berührung aktiviert wird, d.h. es wird ein Alarm ausgelöst, ohne dass ein Einbruch stattfindet. Das passiert mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p.
Anwohner beobachteten mit einigem Missfallen, dass die Alarmanlage in 25% der Nächte, in denen der Wagen auf dem Parkplatz abgestellt wurde, anschlug.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Alarm ausgelöst wird, obwohl der Wagen nicht aufgebrochen wird?

ii) Der Discjockey hört seine Alarmanlage aufheulen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Einbruch stattfindet?
Hinweis: Sie können diese Aufgabe auch ohne das Resultat aus i) lösen.

4) **Vektorgeometrie, 9.5 Punkte**
Bei einem Wettrennen mit Modellfahrzeugen startet ein U–Boot im Punkt (312|–640|–100), ein Schiff im Punkt (–622|1243|0) und ein Heissluftballon im Punkt (–450|754|200). Da die drei Verkehrsmittel nicht durch ein gemeinsames Ziel schwimmen bzw. fahren können, hat derjenige gewonnen, welcher als erster die Ebene Z: $x - 2y + 8 = 0$ erreicht. Der Meeresspiegel ist die xy–Ebene, eine Einheit entspricht einem Meter.

a) *(2 Punkte)* Das **U–Boot** muss wegen einer Untiefe etwas aufsteigen und erreicht das Ziel im Punkt (–8|0|–20). Wie viele Sekunden brauchte es für seine Strecke, wenn es geradlinig und mit 16.2 km/h unterwegs war?

b) *(2.5 Punkte)* Bestimmen Sie den Zielpunkt des **Schiffs**, wenn es auf dem schnellstmöglichen Weg (senkrecht zur Ebene Z) nach 155 Sekunden beim Ziel ankommt.

c) Der **Ballon** wird abgelenkt (Wind) und legt pro Sekunde den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ zurück.

i) *(2 Punkte)* In welchem Punkt kommt der Ballon bei der Zielebene an?

ii) *(1 Punkt)* Wie viele Sekunden brauchte der Ballon für seine Fahrt? (Und wer hat damit das Rennen gewonnen?)

iii) *(2 Punkte)* Wie lange hätte der Ballon vom Start bis zur Zielebene gebraucht, wenn er mit der gleichen Geschwindigkeit, aber auf dem kürzestmöglichen Weg gefahren wäre?

5) **Analysis, 10 Punkte**

Der Mathematiker einer Firma, welche Glacé (Eiskrem) verkauft, hat eine Funktion G(t) gefunden, welche angenähert jeder Woche t eines Jahres ($0 \le t \le 52$) den Gewinn G pro Woche (in Fr.) zuordnet:

$$G(t) = -\frac{25}{144}t^3 + \frac{25}{12}t^2 + 400t - 4800$$

a) *(6 Punkte)* Beantworten Sie folgende Fragen mit einer ganz kurzen Begründung und mit Hilfe des Taschenrechners:

i) In welchen Wochen macht die Firma Verlust?

ii) Wann ist der Gewinn maximal bzw. minimal, und wie gross ist der Gewinn/Verlust dann?

iii) Berechnen Sie alle Wendepunkte des Graphen von G(t) für $0 \le t \le 52$ und erläutern Sie in einem kurzen Satz die Bedeutung des Wendepunkts für die Gewinnfunktion der Firma.

iv) Berechnen Sie den Gesamtgewinn bzw. –verlust der Firma über das ganze Jahr (= Wochen 0 bis 52).

v) Wie viel Gewinn würde die Firma in der 45. Woche machen, wenn der Gewinn ab der 24. Woche konstant weiter wachsen würde (also mit der gleichen Zunahmerate wie in der 24. Woche)?

b) *(4 Punkte)* Eine Konkurrenzfirma erzielt ihren grössten Gewinn in der 20. Woche, nämlich 6000 Fr. pro Woche. Den grössten Verlust machte sie in der 50. Woche. Am Anfang des Jahres (t = 0) machte die Firma 3000 Fr. pro Woche Verlust.
Bestimmen Sie eine ganz rationale Funktion 3. Grades, welche den Gewinn für diese Firma als Funktion der Zeit t (in Wochen) zuordnet.

6) **3 unabhängige Aufgaben zur Statistik, 10 Punkte**

a) *(3 Punkte)* Bei der Mathematikprüfung soll untersucht werden, wie viele der 6 Aufgaben von den 99 Schülerinnen und Schülern sinnvoll bearbeitet wurden. Dabei entstand folgende Tabelle:

Anzahl Aufgaben sinnvoll bearbeitet	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl Schülerinnen und Schüler	3	5	17	11	38	21	4

Berechnen Sie Mittelwert, Median und Standardabweichung der Anzahl sinnvoll bearbeiteter Aufgaben.

b) *(3 Punkte)* Die Maturandinnen und Maturanden sollen im Rahmen eines Wettbewerbs ihre 5 schriftlichen Prüfungsnoten erraten. David errät jede einzelne der 5 Noten mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl Noten, welche David von seinen 5 Noten richtig errät. Berechnen Sie den Erwartungswert E(X).
(TIPP: Bernoulli–Experiment)

c) *(4 Punkte)* Fabienne behauptet, sie könne die Mathematik–Noten aller 20 Schülerinnen und Schüler ihrer Klasse mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70% vorhersagen. Sie glauben ihr nicht und führen einen **statistischen Test** durch:
Fabienne soll alle 20 Noten vorhersagen. Bestimmen Sie den Bereich, in dem Fabiennes Behauptung zum Signifikanzniveau von 5% verworfen werden kann. Wie lautet Ihre Entscheidung (in einem kurzen Satz), wenn Fabienne 13 von 20 Noten korrekt vorhersagt?

Viel Glück !