KANTONSSCHULE KREUZLINGEN **MATHEMATIK / 3 Std.**
MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2004 **Klasse 4 MC / ho**
TYPUS MAR

Zeit: 180 Minuten
Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung DMK
Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf ein separates Blatt zu lösen, rechts 2 cm Rand lassen.
Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
Alle Teilaufgaben (a, b, c, ...) sind voneinander unabhängig lösbar.
Alle Aufgaben ergeben gleich viele Punkte (nämlich 10).
50 Punkte ergeben eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.

(1) Jeder Mensch hat Blut einer bestimmten Blutgruppe. Der Tabelle unten entnimmt man die Anteile von drei speziellen Blutgruppen in einer Bevölkerung:

Blutgruppe	AB negativ	B positiv	A positiv
Anteil	$\frac{1}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{1}{3}$

(a) *(3 Punkte)* An einem Tag werden 18 Blutspender erwartet.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den 18 beliebig ausgewählten Blutspendern keiner mit den drei oben aufgeführten Blutgruppen AB negativ, B positiv, A positiv ?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den 18 beliebig ausgewählten Blutspendern höchstens zwei mit der Blutgruppe AB negativ ?

(b) *(2.5 Punkte)* Man benötigt dringend die Blutgruppe AB negativ. Wieviele Spender benötigt man mindestens, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens ein Spender mit der Blutgruppe AB negativ dabei ist ?

(c) *(4.5 Punkte)* Zur Blutspende werden nur gesunde Menschen zugelassen. 4% der Bevölkerung leiden jedoch unter einem nicht diagnostizierten Diabetes. Deswegen wird bei allen Blutspendern ein Schnelltest angewandt, der jedoch nicht vollständig sicher ist: So werden an Diabetes Erkrankte nur zu 95% erkannt, während 2% der gesunden Personen als Diabetiker eingestuft werden. (Zeichnen Sie, falls nötig, einen Baum.)

(i) Ein zufällig ausgewählter Spender erscheint zum Schnelltest. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautet das Testergebnis "es liegt kein Diabetes vor" ?

(ii) Ein Spender wird vom Test als Diabetiker ausgewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dennoch keinen Diabetes hat ?

(iii) Der Test wird so verbessert, dass Diabetiker immer noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% erkannt werden, gesunde Personen werden aber mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit p fälschlicherweise als krank eingestuft. Nun hat eine als Diabetiker eingestufte Person nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% keinen Diabetes. Wie gross ist p ?

(2) Es seien die Punkte A(5|5|–3), B(3|4|–1) und C(5|2|0) sowie die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) *(1.5 Punkte)* Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit E: $-2x - 4y - 4z + 18 = 0$)

(b) *(2 Punkte)* Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E.

(c) *(2 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AC bilden.

(d) *(1.5 Punkte)* Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

(e) *(3 Punkte)* Finden Sie alle Punkte $S \in g$, die mit dem Quadrat ABCD eine (nicht notwendigerweise gerade) Pyramide mit dem Volumen 18 bilden.
(Sie brauchen dafür den Punkt D aus Teilaufgabe d nicht !)

(3) Gegeben ist die Funktion f: $y = \dfrac{8x-4}{x^2+4x}$.

(a) *(5.5 Punkte)* Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu:

(i) den Definitionsbereich

(ii) die Nullstellen

(iii) die Extrema

(iv) die Grenzwerte bei den Definitionslücken und bei $x \to \pm\infty$

(v) die Gleichungen der Asymptoten

(vi) Skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf korrekte Krümmung und zeichnen Sie die Asymptoten ein.

(b) *(4.5 Punkte)* Berechnen Sie die Fläche, die eingeschlossen wird von der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = -2$ und der Parabel $y = x^2 + 1$.

(4) Ein Flugzeug befindet sich um 12.20 Uhr bei den Koordinaten F(5|11|2) (eine Einheit entspricht einem Kilometer). Das Flugzeug beschreibt eine völlig geradlinige Flugbahn und legt pro Minute den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ zurück.

(a) *(1.5 Punkte)* Wie schnell fliegt das Flugzeug in km/h ?

(b) *(1.5 Punkte)* Wenn das Flugzeug geradeaus weiterfliegt, trifft es auf eine steile Felswand, die als Ebene mit der Gleichung E: –9x + 5y +1500 = 0 beschrieben werden kann. In welchem Winkel würde das Flugzeug auf die Wand prallen ?

(c) *(4.5 Punkte)* Um exakt 12.22 Uhr und 48 Sekunden beginnt ein Gewitter mit Zentrum bei den Koordinaten G(45|–10|2.5).

(i) Wie weit entfernt vom Gewitterzentrum befindet sich das Flugzeug um 12.22 Uhr und 48 Sekunden?

(ii) Berechnen Sie die kürzeste Distanz des Flugzeugs zum Gewitterzentrum, wenn es auf der geraden Flugbahn weiterfliegt.

(d) *(2.5 Punkte)* Ein zweites Flugzeug fliegt ebenfalls auf einer geradlinigen Flugbahn entlang der Geraden $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$

Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge nicht schneiden.

(5) Ein Biologe setzt zu wissenschaftlichen Zwecken in einem abgeschlossenen Gebiet Kaninchen und Füchse aus und misst während 12 Jahren den Bestand der Tiere. Nach Abschluss des Experiments hat ein Mathematiker für die Anzahl Kaninchen zum Zeitpunkt x die Näherungsfunktion

$$K(x) = 4x^3 - 60x^2 + 196x + 1000$$

gefunden ($0 \leq x \leq 12$ bezeichnet die Anzahl Jahre nach Beginn des Experiments).
Geben Sie die Lösungen der folgenden Aufgaben jeweils auf Tage genau an (1 Jahr = 365 Tage) und notieren Sie den Lösungsweg, wobei Sie die Gleichungen mit dem Taschenrechner (POLYROOT) lösen dürfen.

(a) *(2 Punkte)* Wann hat es die wenigsten, wann die meisten Kaninchen in den 12 Jahren ?

(b) *(2.5 Punkte)* Zu welchem Zeitpunkt nimmt der Kaninchenbestand am stärksten ab ? Wie gross ist diese Abnahme ? (Beschreiben Sie in einem kurzen Satz, welche Masseinheit die Lösungszahl hat und was diese bedeutet!)

(c) *(2.5 Punkte)* Wie gross ist der Kaninchenbestand über die 12 Jahre im Durchschnitt ? *(Den Durchschnitt der Funktionswerte erhält man, indem man die Fläche unter dem Graphen durch die Länge des entsprechenden Intervalls auf der x-Achse dividiert.)*

(d) *(3 Punkte)* Finden Sie eine entsprechende Näherungsfunktion

$$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

für den Fuchsbestand, wenn die Messungen folgendes ergaben:
- Zu Beginn (Jahr 0) wurden 200 Füchse ausgesetzt.
- Nach 10 Jahren sind die Füchse ausgestorben.
- Die meisten Füchse gab es nach 5 Jahren, nämlich 300 Tiere.

(6) Nun noch zwei unabhängige Kurzaufgaben zu verschiedenen Themen:

(a) *(4.5 Punkte)* Bei einem Glücksspiel werden mit einem Griff 4 Kugeln aus einer Kiste mit 10 roten und 50 weissen Kugeln gezogen. Für jede weisse Kugel muss der Spieler 2 Franken bezahlen, für jede rote Kugel bekommt er vom Veranstalter 5 Franken. Es sei X der Gewinn bzw. Verlust beim einmaligen Spielen. Berechnen Sie E(X), VAR(X) und σ !

(b) *(5.5 Punkte)* Ein Architekt soll ein einstöckiges, quaderförmiges Gebäude möglichst kostengünstig bauen. Dabei hat er folgende Bedingungen zu erfüllen:
- Das Volumen soll 1000 m^3 betragen.
- Die nach Süden und Norden gerichteten Seiten sollen doppelt so lang sein wie die nach Osten bzw. Westen gerichtete Seiten.
- Die Südfassade kostet 5000 Fr. pro m^2, die anderen drei Fassaden kosten 1200 Fr. pro m^2. (Die Südfassade soll ganz aus Glas sein und ist teurer als eine normale Mauer.)
- Das Flachdach kostet 1500 Fr. pro m^2

Berechnen Sie die Abmessungen (Länge, Breite, Höhe) des optimalen Bauwerks auf zwei Stellen nach dem Komma, wobei alle anderen Kosten (Aushub, Boden usw.) zu vernachlässigen sind.

Viel Glück !