

Zeit: 180 Minuten

Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung DMK

Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf eine separate Seite zu lösen, rechts 2 cm Rand lassen.

Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.

Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.

Alle Aufgaben ergeben gleich viele Punkte (nämlich 10).

50 Punkte ergeben eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.

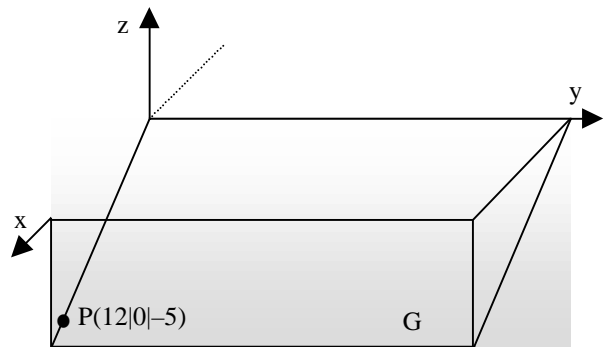
Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !

- (1) Gegeben sind die Punkte $A(0|-4|3)$, $B(1|4|-2)$ und $C(-2|4|1)$ sowie die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$
- (a) Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene E. Geben Sie die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform an und zeigen Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.
- (b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang.
- (c) Berechnen Sie die Höhe h_c des Dreiecks ABC
- (d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand hat.
- (2) In einer Kiste befinden sich 5 rote, 3 weisse und 2 gelbe Kugeln. Gleichfarbige Kugeln sind nicht voneinander unterscheidbar.
- (a) Ein Kind legt die Kugeln nacheinander auf einen Tisch. Wie viele verschiedene Anordnungsmöglichkeiten gibt es,
- (i) wenn keine weiteren Einschränkungen bestehen?
- (ii) wenn alle gleichfarbigen Kugeln jeweils nebeneinander liegen sollen?
- (iii) wenn nie zwei rote Kugeln nebeneinander liegen dürfen?
- (b) Die Kugeln werden in einem ersten Spiel **mit Zurücklegen** gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
- (i) bei 4 Ziehungen genau 2 gelbe Kugeln zu ziehen?
- (ii) bei 10 Ziehungen keine gelbe Kugel zu ziehen?
- (iii) bei 5 Ziehungen mindestens 3 rote Kugeln zu ziehen?
- (iv) bei der 10. Ziehung die 7. rote Kugel zu ziehen?
- (c) Im zweiten Spiel werden drei Kugeln mit einem Griff gezogen. Für jede weisse Kugel erhält der Spieler 2 Fr, für jede andersfarbige muss er einen Franken bezahlen. Mit welchem durchschnittlichen Gewinn kann der Spieler pro Spiel rechnen?

(3) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 2x - 3}$

- (a) Führen Sie eine Kurvendiskussion unter folgenden Gesichtspunkten durch: Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema, Grenzverhalten bei $\pm\infty$ und bei den Polstellen. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an und zeichnen Sie den Graphen mit seinen Asymptoten (1 Einheit = 2 Häuschen).
- (b) Geben Sie ohne Rechnung an, ob die Funktion Wendepunkte besitzt. Wenn Ja, geben Sie für jeden Wendepunkt ohne zu Rechnen ein möglichst kleines Intervall auf der x-Achse an, in dem dieser liegt !
- (c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von $f(x)$ die Gerade $g: x = 4$?

(4) Im Bild rechts sehen Sie die Skizze eines künstlich angelegten Schwimmbeckens. Die Wasseroberfläche ist die Ebene $z = 0$, G bezeichnet den Grund des Beckens. Auf G liegt die y-Achse und der Punkt $P(12|0|-5)$.



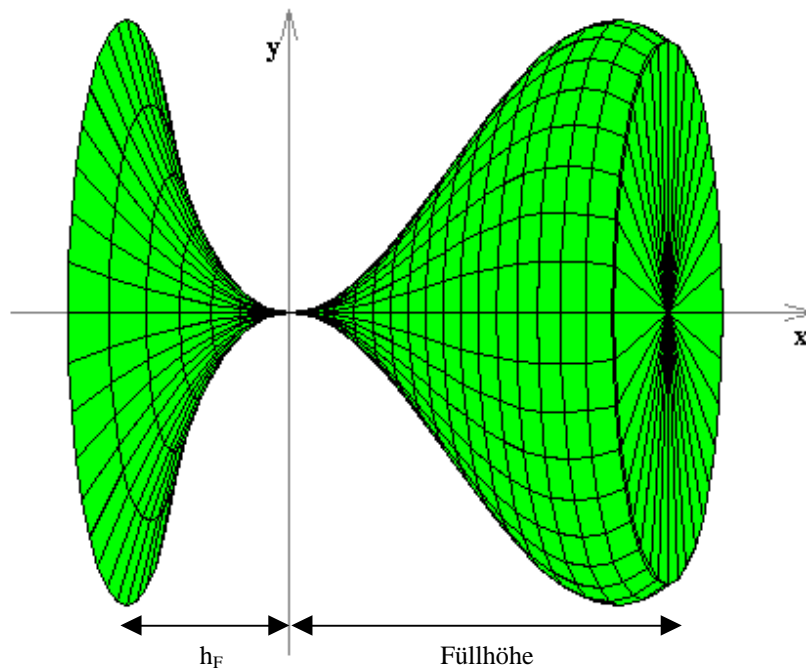
- (a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene G !
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit der falschen Lösung $G: -16x + 5y - 5z = 0$)
- (b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene G und der Wasseroberfläche $z = 0$!
- (c) Ein Stein fällt beim Punkt $S(6|10|0)$ ins Wasser und sinkt senkrecht nach unten. Bei welchen Koordinaten trifft der Stein auf dem Grund G auf ?
- (d) Ein Ball schwimmt auf der Wasseroberfläche beim Punkt $B(6.5|4|0)$
 - (i) Wie gross ist der kürzeste Abstand vom Ball B zum Grund G ?
 - (ii) Das Sonnenlicht fällt in der Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein. Wo befindet sich der Schatten des Balles auf dem Beckengrund G ?

(5) Stellt man eine heisse Tasse Tee von 80°C zum Zeitpunkt $t = 0$ in einen Raum mit einer Zimmertemperatur von 20°C , so kühlt sich der Tee nach der Gleichung $T(t) = 20 + 60 \cdot e^{-c \cdot t}$ ab, wobei T die Temperatur in $^\circ\text{C}$, t die Zeit in Minuten und $c > 0$ ein Parameter ist.

- (a) Zeigen Sie, dass der Tee unabhängig vom Wert des Parameters c am Anfang ($t = 0$) die Temperatur 80°C hat.
- (b) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ und erklären Sie in einem kurzen Satz, was dieser Term bedeutet.
- (c) Der Tee ist nach 5 Minuten immer noch 70°C heiss. Berechnen Sie den Parameter c !
(Falls Sie in c) keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit $c = 0.0420985$)
- (d) Wann sinkt die Temperatur des Tees unter 25°C ?
- (e) Die Fläche zwischen dem Graphen von $T(t)$ und der Geraden $T = 20$ (Umgebungstemperatur-Kurve) entspricht der von der Tasse an die Umgebung abgegebenen Wärmeenergie. Berechnen Sie diese Fläche für $0 \leq t \leq 20$ (d.h. die Energie, die in den ersten 20 Minuten abgegeben wird) !
(TIPP: Die Stammfunktion steht im Formelbuch)

(6) Zum Schluss noch zwei (gleich stark bewertete) Kurzaufgaben

- (a) Ein Glasdesigner möchte ein neues Cocktailglas entwerfen (Bild unten), dessen Randkurve durch die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ dargestellt wird. Der Fuss des Glases soll die gleiche Breite wie der Kelch an seiner breitesten Stelle haben.
- Berechnen Sie die Höhe des Fusses h_F !
 - Berechnen Sie das Füllmenge (Volumen) des Glases, wenn die Füllhöhe von $x = 0$ aus 2.5 Einheiten beträgt !



- (b) Ein Elektronikkonzern stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% fehlerhaft. Nun wird zur Aussonderung der fehlerhaften Chips ein Prüfgerät eingesetzt, von dem man folgendes weiss: 3% aller geprüfter Chips werden ausgesondert obwohl sie einwandfrei sind. Total werden 83% aller Chips nicht ausgesondert. Zeichnen Sie einen Baum und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Chip fehlerhaft ist, aber nicht ausgesondert wird !

Viel Glück !