Lösungen: **(Die Aufgaben sind fett**, die Lösungen normal geschrieben.)

1) **Gegeben sind die Punkte A(0|–4|3), B(1|4|–2) und C(–2|4|1) sowie die Gerade g:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

a) **Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene E. Geben Sie die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform an und zeigen Sie mit Hilfe dieser Gleichung, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.**

$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix}$ welcher parallel zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist. Setze z.B. A(x = 0 | y = –4 | z = 3) in den Ansatz

E: 2x + y + 2z + D = 0 ein. ⇒ D = –2 und E: 2x + y + 2z – 2 = 0.

g ist parallel zu E, da der Richtungsvektor von g senkrecht auf $\overrightarrow{n_E}$ steht: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

a) **Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und berechnen Sie den Flächeninhalt und den Umfang.**

Da $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ist $\gamma = 90°$.

Fläche A = $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ oder da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt = $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$ = 18

Umfang = $|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BC}|$ = 22.215

c) **Berechnen Sie die Höhe h_c des Dreiecks ABC**

h_c = d(C,Gerade (AB)) ; Gerade (AB): $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow h_c = \dfrac{\left| \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right|} = 3.795$

d) **Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T auf der Geraden g, der von A den kürzesten Abstand hat.**

Abstand steht senkrecht ⇒ Schneide g mit einer zu g senkrechten Ebene F, die durch A geht:
Ansatz für F: 5x + 2y – 6z + D = 0 ; Einsetzen von A(x = 0 | y = –4 | z = 3) ergibt D = 26
F ∩ g: 5·(16 + 5t) + 2·(3 + 2t) – 6·(–3 – 6t) + 26 = 0 ⇒ t = –2 ⇒ T(6|–1|9)

2) In einer Kiste befinden sich 5 rote, 3 weisse und 2 gelbe Kugeln. Gleichfarbige Kugeln sind nicht voneinander unterscheidbar.

a) Ein Kind legt die Kugeln nacheinander auf einen Tisch. Wie viele verschiedene Anordnungsmöglichkeiten gibt es, ...

i) wenn keine weiteren Einschränkungen bestehen?

$$\underbrace{\binom{10}{5}}_{\text{Plätze für rote}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{Plätze für weisse}} \cdot \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{Plätze für gelbe}} = \underline{\underline{2520}}$$

ii) wenn alle gleichfarbigen Kugeln jeweils nebeneinander liegen sollen?

Die jeweils gleichfarbigen Kugeln werden als eine Einheit betrachtet. $\underbrace{3}_{\text{Plätze für rote}} \cdot \underbrace{2}_{\text{Plätze für weisse}} \cdot \underbrace{1}_{\text{Plätze für gelbe}} = \underline{\underline{6}}$

iii) wenn nie zwei rote Kugeln nebeneinander liegen dürfen?

Die roten Kugeln zuerst verteilen (geht auf 6 Arten, nämlich 1,3,5,7,9 oder 1,3,5,7,10 oder 1,3,5,8,10 oder 1,3,6,8,10 oder 1,4,6,8,10 oder 2,4,6,8,10) $\Rightarrow \underbrace{6}_{\text{Plätze für rote}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{Plätze für weisse}} \cdot \underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{Plätze für gelbe}} = \underline{\underline{60}}$

b) Die Kugeln werden in einem ersten Spiel mit Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

i) bei 4 Ziehungen genau 2 gelbe Kugeln zu ziehen?

Bernoulli-Experimente $\Rightarrow B(4,2;\frac{1}{5}) = \binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \underline{\underline{0.154}}$

ii) bei 10 Ziehungen keine gelbe Kugel zu ziehen?

$B(10,0;\frac{1}{5}) = \binom{10}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^0\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \underline{\underline{0.107}}$

iii) bei 5 Ziehungen mindestens 3 rote Kugeln zu ziehen?

$\sum_{k=3}^{5} B(5,k;\frac{1}{2}) = \sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \underline{\underline{0.5}}$

iv) bei der 10. Ziehung die 7. rote Kugel zu ziehen?

nur Bernoulli-Experiment bis zur 9. Ziehung. Die 10 Ziehung ist gesondert zu betrachten:

$$\underbrace{B(9,6;\tfrac{1}{2})}_{\text{6 rote Kugeln bis zur 9. Ziehung ziehen}} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{in der 10. Ziehung die 7.rote Kugel ziehen}} = \binom{9}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{0.082}}$$

c) Im zweiten Spiel werden drei Kugeln mit einem Griff gezogen. Für jede weisse Kugel erhält der Spieler 2 Fr, für jede andersfarbige muss er einen Franken bezahlen. Mit welchem durchschnittlichen Gewinn kann der Spieler pro Spiel rechnen?

X=	3 weisse: 6 Fr.	2 weisse: 3 Fr.	1 weisse: 0 Fr.	0 weisse: –3 Fr.
P(X=...)	$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = 0.00833$	$\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = 0.175$	$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = 0.525$	$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = 0.2916667$

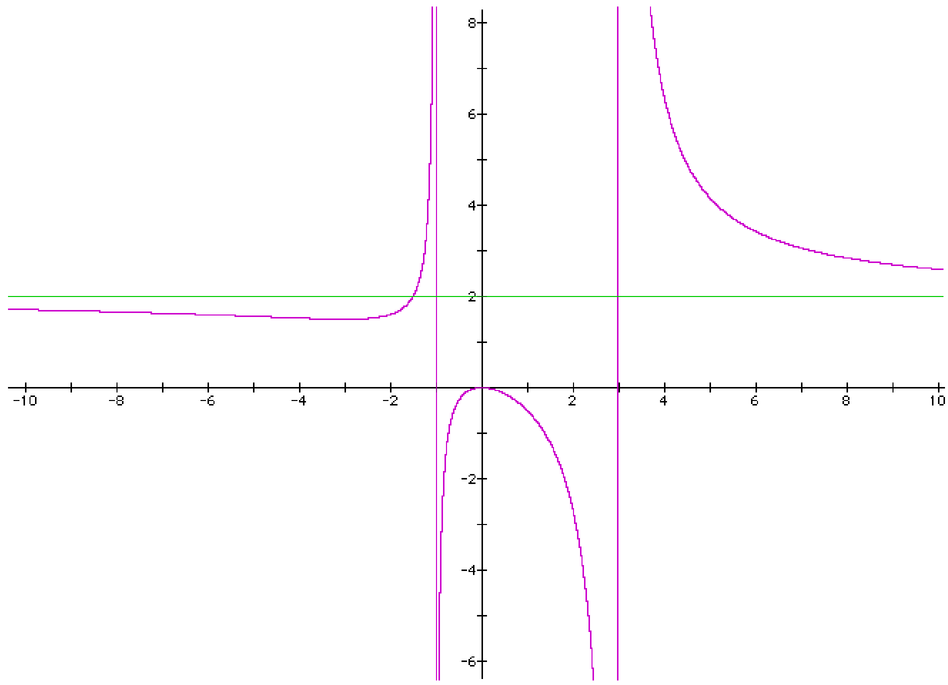
$\Rightarrow E(X) = 0.00833\cdot 6$ Fr. $+ 0.175\cdot 3$ Fr. $+ 0.525\cdot 0$ Fr. $- 0.2916667\cdot 3$ Fr. $= \underline{\underline{-0.3\text{ Fr.}}}$

3) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x - 3}$

a) Führen Sie eine Kurvendiskussion unter folgenden Gesichtspunkten durch: Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema, Grenzverhalten bei ±∞ und bei den Polstellen. Geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an und zeichnen Sie den Graphen mit seinen Asymptoten (1 Einheit = 2 Häuschen).

- $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$
- NS: $2x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$
- Extrema: $f'(x) = \dfrac{4x \cdot (x^2 - 2x - 3) - 2x^2 \cdot (2x - 2)}{(x^2 - 2x - 3)^2} = 0 \Rightarrow -4x(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = -3$

  $\Rightarrow \underline{\underline{E_1(0|0)\ ,\ E_2(-3|1.5)}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ Asymptotengleichung $\underline{\underline{y = 2}}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = \infty \Rightarrow$ Asymptotengleichungen $\underline{\underline{x = -1}}$; $\underline{\underline{x = 3}}$
- Graph: siehe unten:

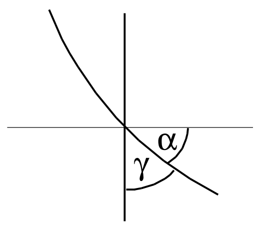


b) Geben Sie ohne Rechnung an, ob die Funktion Wendepunkte besitzt. Wenn Ja, geben Sie für jeden Wendepunkt ohne zu Rechnen ein möglichst kleines Intervall auf der x-Achse an, in dem dieser liegt !

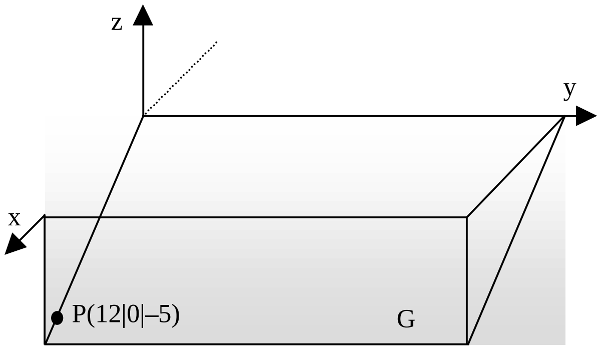
Ja, es gibt einen links vom Minimum bei $x = -3$

c) Unter welchem Winkel γ schneidet der Graph von f(x) die Gerade g: x = 4 ?

Steigung bei $x = 4$ ist $f'(4) = -4.48$ (Ableitung siehe oben). Der gesuchte Winkel γ ist dann (siehe Bild rechts) $\gamma = 90° - \alpha = 90° - |\arctan(f'(4))| = 90° - 77.42° =$ $\underline{\underline{12.58°}}$



4) Im Bild rechts sehen Sie die Skizze eines künstlich angelegten Schwimmbeckens. Die Wasseroberfläche ist die Ebene z = 0, G bezeichnet den Grund des Beckens. Auf G liegt die y-Achse und der Punkt P(12|0|–5).



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene G !
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit der falschen Lösung G: –16x + 5y – 5z = 0)

P(12|0|–5) und der Nullpunkt O(0|0|0), sowie die y-Achse mit der Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen auf E $\Rightarrow$

$\vec{n}_G = \vec{OP} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$. Setze O(x = 0 | y = 0 | z = 0) in den Ansatz –5x – 12z + D = 0 ein $\Rightarrow$ D = 0 , also

G: –5x – 12z = 0

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene G und der Wasseroberfläche z = 0 !

$$\vec{n}_{\text{Wasseroberfläche}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \cos(\alpha) = \left| \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} \right|} \right| = \frac{|-12|}{1 \cdot 13} = \frac{12}{13} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 22.62°}}$$

c) Ein Stein fällt beim Punkt S(6|10|0) ins Wasser und sinkt senkrecht nach unten. Bei welchen Koordinaten trifft der Stein auf dem Grund G auf ?

Der Stein fällt senkrecht nach unten, also ändert sich nur seine z-Koordinate. Zudem liegt der gesuchte Punkt auf G. Setze also x = 6 und y = 10 in G ein: –30 – 12z = 0 $\Rightarrow$ z = –2.5 $\Rightarrow$ Bei (6|10|–2.5)

d) Ein Ball schwimmt auf der Wasseroberfläche beim Punkt B(6.5|4|0)

i) Wie gross ist der kürzeste Abstand vom Ball B zum Grund G ?

HNF: d(B,G) 0 $\frac{-5 \cdot 6.5 - 12 \cdot 0}{\sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}} = -\frac{32.5}{13}$ $\Rightarrow$ Der Abstand beträgt 2.5

ii) Das Sonnenlicht fällt in der Richtung $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein. Wo befindet sich der Schatten S des Balles auf dem Beckengrund G ?

Der Schatten des Balles B fällt in Richtung der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$. Schneide g mit der

Ebene G: –5·(6.5 – t) – 12(–5t) = 0 $\Rightarrow$ t = 0.5 $\Rightarrow$ S(6|5.5|–2.5)

5) Stellt man eine heisse Tasse Tee von 80°C zum Zeitpunkt t = 0 in einen Raum mit einer Zimmertemperatur von 20°C, so kühlt sich der Tee nach der Gleichung $T(t) = 20 + 60\cdot e^{-c\cdot t}$ ab, wobei T die Temperatur in °C, t die Zeit in Minuten und c > 0 ein Parameter ist.

a) Zeigen Sie, dass der Tee unabhängig vom Wert des Parameters c am Anfang (t = 0) die Temperatur 80°C hat.

$T(0) = 20 + 60\cdot\underbrace{e^{-c\cdot 0}}_{=1} = \underline{\underline{80}}$

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} T(t)$ und erklären Sie in einem kurzen Satz, was dieser Term bedeutet.

$\lim\limits_{t\to\infty} T(t) = \lim\limits_{t\to\infty} 20+60\cdot e^{-c\cdot t} = 20+60\cdot \underbrace{\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t}}_{=0} = \underline{\underline{20}}$. Ist die End- oder Grenztemperatur des Tees

c) Der Tee ist nach 5 Minuten immer noch 70°C heiss. Berechnen Sie den Parameter c !

(Falls Sie in c) keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit c = 0.0420985)

$T(5) = 70 = 20 + 60\cdot e^{-c\cdot 5} \Rightarrow 50 = 60\cdot e^{-c\cdot 5} \Rightarrow \frac{5}{6} = e^{-c\cdot 5} \Rightarrow \ln\left(\frac{5}{6}\right) = -c\cdot 5 \Rightarrow c = \frac{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}{-5} = \underline{\underline{0.036464}}$

d) Wann sinkt die Temperatur des Tees unter 25°C ?

gesucht: t mit $T(t) = 25 \Rightarrow 25 = 20 + 60\cdot e^{-c\cdot t} \Rightarrow \frac{5}{60} = e^{-c\cdot t} \Rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{5}{60}\right)}{-c} = \underline{\underline{68.146 \text{ Minuten}}}$

e) Die Fläche zwischen dem Graphen von T(t) und der Geraden T = 20 (Umgebungstemperatur-Kurve) entspricht der von der Tasse an die Umgebung abgegebenen Wärmeenergie. Berechnen Sie diese Fläche für $0 \le t \le 20$ (d.h. die Energie, die in den ersten 20 Minuten abgegeben wird) !
(TIPP: Die Stammfunktion steht im Formelbuch)

$E = \int_0^{20} 20+60\cdot e^{-c\cdot t}\,dt - \int_0^{20} 20\,dt = \int_0^{20} 60\cdot e^{-c\cdot t}\,dt = \left[60\cdot\left(-\frac{1}{c}\right)\cdot e^{-c\,t}\right]_0^{20} = \underline{\underline{851.924}}$

6) Zum Schluss noch zwei (gleich stark bewertete) Kurzaufgaben

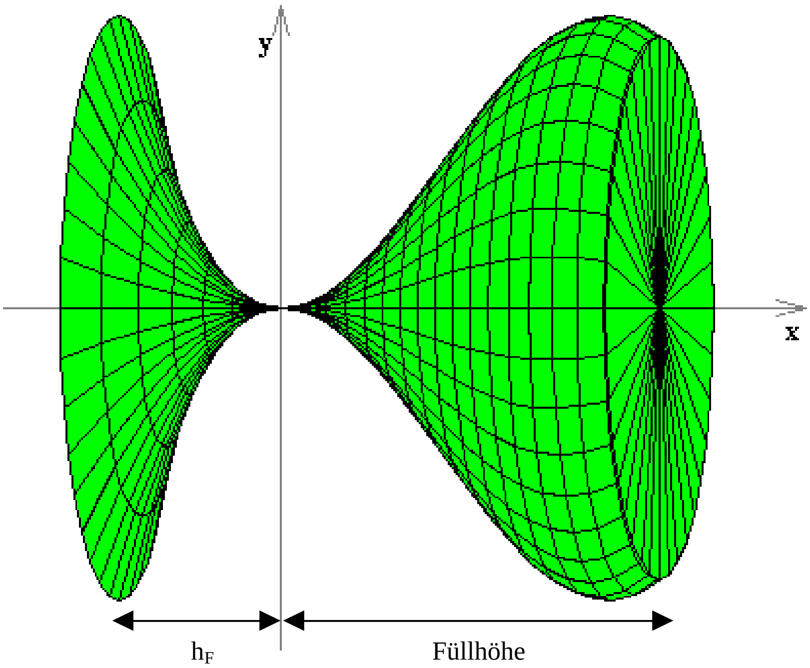
a) Ein Glasdesigner möchte ein neues Cocktailglas entwerfen (Bild unten), dessen Randkurve durch die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2$ dargestellt wird. Der Fuss des Glases soll die gleiche Breite wie der Kelch an seiner breitesten Stelle haben.

i) Berechnen Sie die Höhe des Fusses h_F !

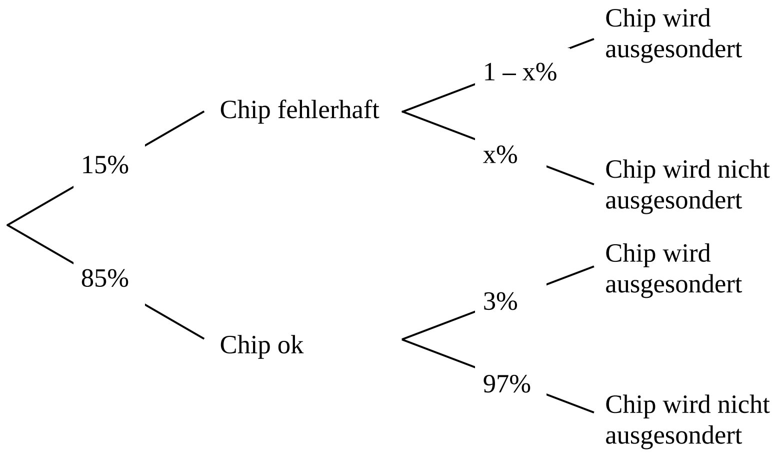
Bestimme das Extremum für x > 0: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$ für $\{x = 0\}$ oder $x = 2 \Rightarrow E(2|-4)$, das heisst, die breiteste Stelle des Glases hat die Breite 4. Gesucht sit nun die x-Stelle beim Fuss mit $f(x) = -4 \Rightarrow -4 = x^3 - 3x^2 \Rightarrow$ für $x = -1$. Also beträgt die Höhe des Fusses 1.

ii) Berechnen Sie das Füllmenge (Volumen) des Glases, wenn die Füllhöhe von x = 0 aus 2.5 Einheiten beträgt !

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{2.5} [x^3 - 3x^2]^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{2.5} x^6 - 6x^5 + 9x^4 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^7}{7} - 6\frac{x^6}{6} + 9\frac{x^5}{5} \right]_0^{2.5} = \underline{\underline{18.834 \cdot \pi}} = \underline{\underline{59.168}}$$



b) **Ein Elektronikkonzern stellt Mikrochips in Massenproduktion her. Jeder hergestellte Chip ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 15% fehlerhaft. Nun wird zur Aussonderung der fehlerhaften Chips ein Prüfgerät eingesetzt, von dem man folgendes weiss: 3% aller geprüfter Chips werden ausgesondert obwohl sie einwandfrei sind. Total werden 83% aller Chips nicht ausgesondert.**
Zeichnen Sie einen Baum und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des schlimmstmöglichen Falls, dass ein Chip fehlerhaft ist, aber nicht ausgesondert wird !



Die Wahrscheinlichkeit x ist gesucht. Total werden 83% aller Chips nicht ausgesondert

$\Rightarrow\ 83\% = \underset{\substack{\text{fehlerhafte Chips, die} \\ \text{ausgesondert werden}}}{15\% \cdot x\%} + \underset{\substack{\text{einwandfreie Chips, die} \\ \text{ausgesondert werden}}}{85\% \cdot 97\%} \quad \Rightarrow\ x = 3.667\%$.

$\Rightarrow$ <u>3.667% aller fehlerhaften Chips werden nicht ausgesondert.</u>