Lösungen: (Die Aufgaben sind fett, die Lösungen normal geschrieben.)

(1) **Gegeben sind die Punkte A(–5|4|2), B(7|–1|–2), C(–5|–2|–1) und D(5.5|–8|20), sowie die Gerade g, die durch den Punkt B geht und parallel zur y–Achse ist.**

(a) **Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene ABC.**

Der Normalenvektor $\vec{n}_E$ steht senkrecht auf z.B. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix}$,
wobei man $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -9 \\ 36 \\ -72 \end{pmatrix}$ "kürzen" kann: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Der Ansatz für die Koordinatengleichung von E lautet: x – 4y + 8z + d = 0.
Setze nun für x, y und z z.B. die Koordinaten des Punktes A ∈ E ein: –5 – 4·4 + 8·2 + d = 0 ⇒ d = 5
⇒ $\underline{\underline{E: x - 4y + 8z + 5 = 0}}$

(b) **Bestimme den Abstand vom Punkt D zur Ebene ABC.**

HNF: $\pm d(P,E) = \dfrac{x - 4y + 8z + 5}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2}} = \dfrac{5.5 - 4\cdot(-8) + 8\cdot 20 + 5}{9} = \underline{\underline{22.5}}$

(c) **Bestimme den Punkt der Ebene ABC, welcher den kürzesten Abstand zum Punkt D hat.**
Man bekommt diesen Punkt F, indem man die Lotgerade f auf E durch D fällt und mit E schneidet:
Gleichung von f: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.
E ∩ f: (5.5 + t) – 4(–8 – 4t) + 8(20 + 8t) + 5 = 0 ⇒ t = –2.5 ⇒ setze t = –2.5 in die Geradengleichung von f ein ⇒ $\underline{\underline{F(3|2|0)}}$

(d) **Berechne den Winkel α = ∠(BAC).**

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{185}\cdot\sqrt{45}} = 0.4603 \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{62.59°}}$$

(e) **Bestimme den Abstand vom Punkt A zur Geraden g.**

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit der Formel für Abstand Punkt-Gerade folgt:

$$d(g, A) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}\right|}{1} = \underline{\underline{12.65}}$$

(2) **Gegeben ist die Funktion f: y =** $\dfrac{x-3}{x^2+7x+6}$

(a) **Diskutiere die Funktion f. Berechne dazu:**

(i) **Definitionsbereich D**

Nenner wird Null für x = –1 und x = –6 (quadratische Gleichung)

$\Rightarrow \underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{-1,-6\}}}$

(ii) **Nullstellen**

Zähler wird Null für $\underline{\underline{x = 3}}$

(iii) **Extrema**

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+7x+6)-(2x+7)\cdot(x-3)}{(x^2+7x+6)^2}$$ wird Null, wenn der Zähler Null ist $\Rightarrow$ x = 9 oder x = –3

$\Rightarrow \underline{\underline{E_1(-3|1)\ ;\ E_2(9|0.04)}}$

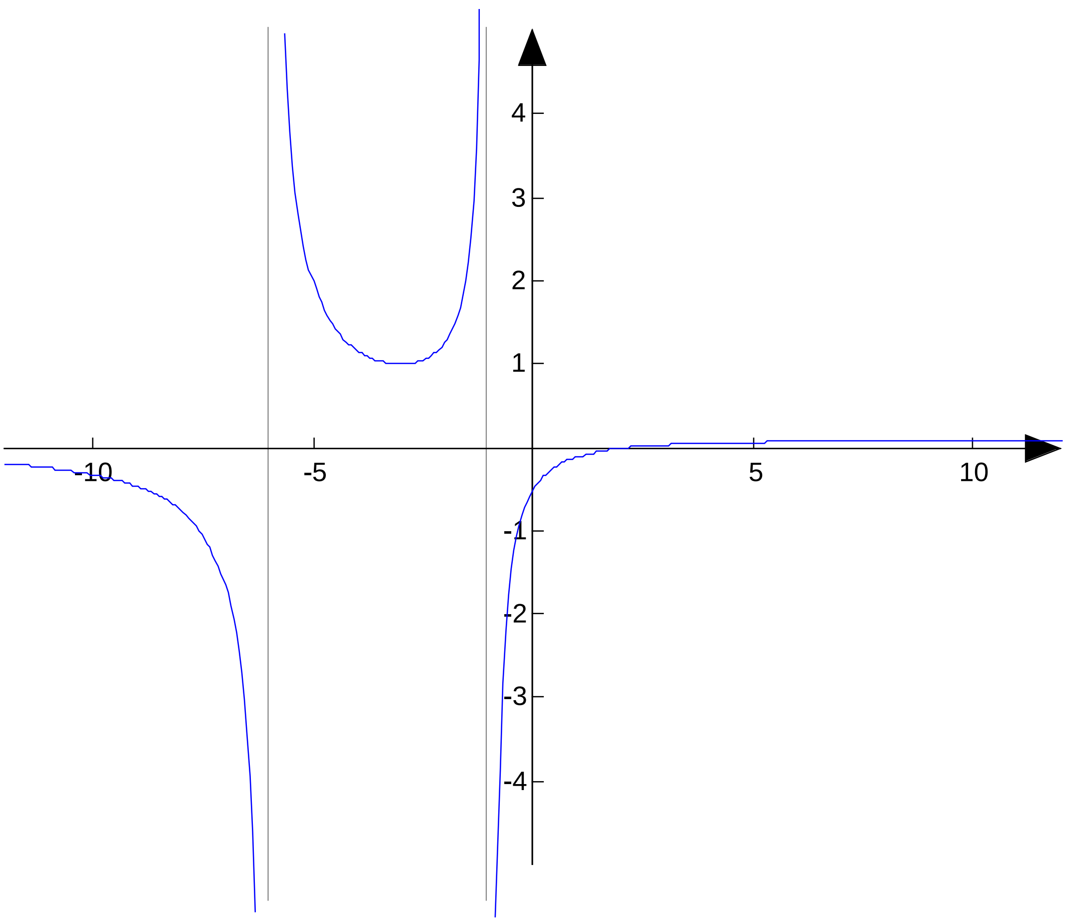
(iv) **Asymptoten**

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \quad \Rightarrow$ x-Achse (Gleichung y = 0) ist Asymptote

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = +\infty\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = -\infty\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to-6\\x<-6}} f(x) = -\infty\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to-6\\x>-6}} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ Asymptotengleichungen $\underline{\underline{x = -1\ ;\ x = -6\ ;\ y = 0}}$

(v) **Skizziere den Graphen im Bereich x ∈ [–12,12]. Achte auf korrekte Krümmung.**



(b) **Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f, der x–Achse und den Geraden x = –10 und x = –20.**

Berechnung der Stammfunktion mittels Partialbruchzerlegung: $\frac{x-3}{x^2+7x+6} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6}$ führt zu $A = -\frac{4}{5}$

und $B = \frac{9}{5}$ $\Rightarrow$ Fläche = $\int_{-20}^{-10} f(x)\ dx = \int_{-20}^{-10} -\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{9}{5}\cdot\frac{1}{x+6}\ dx = \left[-\frac{4}{5}\cdot\ln|x+1| + \frac{9}{5}\cdot\ln|x+6|\right]_{-20}^{-10} = \underline{\underline{-1.657}}$

(3) **Wissenschaftler führen eine Untersuchung zum Nachweis übernatürlicher Fähigkeiten von Schulkindern durch. Dabei müssen die Testpersonen vorher erraten, auf welcher Seite eine Münze landen wird. Im Verlauf der Untersuchung stellt sich heraus, dass Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0.6 die richtige Vorhersage machen, während Knaben in genau der Hälfte aller Fälle korrekt tippen. Aus einer Schulklasse mit 20 Schülern (12 Mädchen und 8 Knaben) soll eine zufällig ausgewählte Gruppe von 6 Personen an der Untersuchung teilnehmen.**

(a) **Wieviele Möglichkeiten hat der Lehrer, eine Gruppe auszuwählen, wenn ...**

(i) **je drei Mädchen und drei Knaben in der Gruppe vertreten sein sollen?**

$\binom{12}{3}\cdot\binom{8}{3} = \underline{\underline{12320}}$

(ii) **mindestens zwei Mädchen und mindestens zwei Knaben in der Gruppe vertreten sein sollen?**

$\binom{12}{2}\cdot\binom{8}{4} + \binom{12}{3}\cdot\binom{8}{3} + \binom{12}{4}\cdot\binom{8}{2} = \underline{\underline{30800}}$

(iii) **sein Lieblingsschüler Stefan und dazu noch mindestens ein Mädchen der Gruppe angehören soll?**

bleibt noch 5 zusätzliche Gruppenmitglieder aus den verbliebenen 19 auszuwählen: $\binom{19}{5} = 11628$,

wobei lauter Jungen (7 weitere ausser Stefan) verboten sind: $\binom{7}{5} = 21$

$\Rightarrow$ <u>total 11607 Möglichkeiten</u>

(b) **Der Lehrer wählt eine Gruppe mit vier Mädchen und zwei Knaben.**

(i) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gruppenmitglied die richtige Vorhersage macht ?**

$p = \frac{4}{6}\cdot 0.6 + \frac{2}{6}\cdot 0.5 = \frac{17}{30} = \underline{\underline{0.567}}$

(ii) **Ein zufällig ausgewähltes Gruppenmitglied hat einen richtigen Tipp abgegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Mädchen war ?**

$p = \frac{\frac{4}{6}\cdot 0.6}{\frac{4}{6}\cdot 0.6 + \frac{2}{6}\cdot 0.5} = = \underline{\underline{0.706}}$

(c) **Ein Mädchen der Gruppe sticht besonders heraus: sie sieht den Ausgang des Münzwurfs mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% voraus. Sie soll jetzt in einem speziellen Versuch zehn Mal hintereinander das Ergebnis erraten.**

(i) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau 8 mal die richtige Vorhersage macht?**

$B(10, 0.8; 8) = \binom{10}{8}\cdot 0.8^8\cdot 0.2^2 = \underline{\underline{0.302}}$

(ii) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens 6 mal die richtige Vorhersage macht?**

$$\sum_{k=6}^{10} B(10,\ 0.8;\ k) = \binom{10}{6} \cdot 0.8^6 \cdot 0.2^4 + \binom{10}{7} \cdot 0.8^7 \cdot 0.2^3 + \ldots + \binom{10}{10} \cdot 0.8^{10} \cdot 0.2^0 = \underline{\underline{0.967}}$$

(iii) **Wieviele Male muss sie mindestens raten, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% 4 Richtige hat?**

$$\sum_{k=4}^{n} B(n,\ 0.8;\ k) > 0.98 \ \Rightarrow\ n \geq 8$$

(4) **Gegeben ist die Kugel K: $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 169$.**

(a) **Die Gerade g, gegeben durch die beiden Punkte A(8|–2|–5) und B(0|2|–9), schneidet die Kugel K in zwei Schnittpunkten S_1 und S_2. Bestimme eine Gleichung der Tangentialebene im Schnittpunkt mit den ganzzahligen Koordinaten.**

Gleichung von g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; Schneide K mit g: $(0 + 2t)^2 + ((2 - t) + 3)^2 + ((-9 + t) - 5)^2 = 169$

diese quadratische Gleichung für t hat die Lösungen: t = 2 und $t = \frac{13}{3}$, wobei t = 2 auf die ganzzahlige Lösung des Schnittpunkts S(4|0|–7) führt. Setzt man in die Formel für die Tangentialebene T ein, so erhält man:

T: $(x - 0)\cdot(4 - 0) + (y + 3)\cdot(0 + 3) + (z - 5)\cdot(-7 - 5) = 169$ oder vereinfacht:

$\underline{\underline{T:\ 4x + 3y - 12z - 100 = 0}}$

(b) **Die Kugel K wird mit der xy–Ebene geschnitten. Der so entstandene Kreis k ist Grundkreis eines schiefen Kegels mit der Spitze S(5|9|3). Berechne ...**

(i) **das Volumen des Kegels.**

Gleichung der xy-Ebene: z = 0. Schneide K mit dieser Ebene: $x^2 + (y + 3)^2 + (0 - 5)^2 = 169$

bzw. vereinfacht: $x^2 + (y + 3)^2 = 144$ also ein Kreis in der xy-Ebene mit Radius 12.

Die Höhe h des Kegels ist der Abstand von S zur xy-Ebene. Mit der HNF für die Ebene z = 0 folgt:

$h = \frac{3}{\sqrt{1}} = 3 \ \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 3 = \underline{\underline{144\pi}}$

(ii) **die Längen der längsten und kürzesten Mantellinie des Kegels ! (*Mantellinie = Strecke von der Spitze S zu einem Punkt auf dem Grundkreis.*)**

Sei F der Fusspunkt der Höhe h auf der xy-Ebene und r der Radius des Grundkreises, so gilt mit Pythagoras für die kürzeste Mantellinie m_k und die längste Mantellinie m_l: $m_k = \sqrt{\overline{SF}^2 + (\overline{FM} - r)^2}$ und

$m_l = \sqrt{\overline{SF}^2 + (\overline{FM} + r)^2}$, wobei $\overline{SF}$ natürlich die Höhe h ist. Mit r = 12 und h = 3 (aus Teilaufgabe b(i)) folgt: $\underline{\underline{m_k = 3.16\ ;\ m_l = 25.18}}$

(5) **Für den Campingbedarf existieren Plastikbehälter mit zwei voneinander getrennten Flüssigkeiten, die beim Knicken des Behälters ineinander fliessen. Dabei entsteht eine chemische Reaktion, die der Umgebung Wärme entzieht. Die Temperatur T [in °C] in Abhängigkeit der Zeit t [in Minuten] nach dem Knicken (bei t = 0) dieses Kühlaggregats wird beschrieben durch die Gleichung:**

$$T(t) = T_0 - a \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{b}}$$

wobei T_0 die Umgebungstemperatur ist (es sei hier T_0 = 20° C). a und b sind Parameter.

(a) **Bei welcher Zeit t nach dem Knicken erreicht das Kühlaggregat die minimale Temperatur ?**
(*Gib die Lösung in Abhängigkeit von a und/oder b an!*)

$T'(t) = -a \cdot \left(1 \cdot e^{-\frac{t}{b}} + t \cdot (-\frac{1}{b}) \cdot e^{-\frac{t}{b}}\right)$ wird Null für $-e^{-\frac{t}{b}} = t \cdot (-\frac{1}{b}) \cdot e^{-\frac{t}{b}}$ bzw. für $-1 = t \cdot (-\frac{1}{b})$

$\Rightarrow \underline{\underline{t_{min} = b}}$

(b) **Wie muss man a bei einer Umgebungstemperatur von T_0 = 20° C in Abhängigkeit von b wählen, damit die minimale Temperatur 0° C beträgt ?**
(*Falls du keine Lösung für das Minimum gefunden hast, rechne weiter mit t_{min} = 2b.*)

T(b) muss Null sein: $T(b) = 20 - a \cdot b \cdot e^{-\frac{b}{b}}$ ist gleich Null, wenn $\underline{\underline{a = \frac{20e}{b}}}$

(c) **Wie gross sind a und b des Aggregats, das nach 20 Minuten die minimale Temperatur von T = –9.43°C erreicht? (Umgebungsemperatur T_0 = 20° C)**

Nach 20 Minuten Minimum ⇒ b = 20

$T(20) = 20 - a \cdot 20 \cdot e^{-\frac{20}{20}} = -9.43 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$

(d) **Die Gesamtenergie, die das Kühlaggregat der Umgebung innerhalb der ersten x Minuten entziehen kann, ist gegeben durch die Gleichung**

$$E(x) = \int_0^x a \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{b}} \, dt$$

Berechne die Energie, die das Kühlaggregat mit a = 5 und b = 10 der Umgebung in den ersten 30 Minuten entzieht ! Wieviel Energie kann das Aggregat insgesamt (d.h. x → ∞) der Umgebung entziehen?

$E(30) = \int_0^{30} 5 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{10}} \, dt$ Die Stammfunktion findet man mit partieller Integration ($f'(t) = e^{-\frac{t}{10}}$; $g(t) = t$:

$$\int_0^{30} 5 \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{10}} \, dt = \left[5t \cdot (-10) \cdot e^{-\frac{t}{10}}\right]_0^{30} - \int_0^{30} 5 \cdot (-10) \cdot e^{-\frac{t}{10}} \, dt = \left[-50 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot (10 + t)\right]_0^{30} = \underline{400.426}$$

$$E(x \to \infty) = \lim_{x \to \infty} \left[-50 \cdot e^{-\frac{t}{10}} \cdot (10 + t)\right]_0^x = 0 - \left[-50 \cdot e^0 \cdot 10\right] = \underline{\underline{500}}$$

(6) **Noch zwei unabhängige Kurzaufgaben.**

(a) **Ein Glücksspiel: Man darf zweimal eine Münze werfen. Fällt zweimal Kopf, so gewinnt man Fr. 15.-, fällt zweimal Zahl, so verliert man 10 Franken. Falls je einmal Kopf und einmal Zahl geworfen wird, passiert überhaupt nichts. Berechne den durchschnittlich zu erwartenden Gewinn, wenn eine Münze benützt wird, die mit 60%-iger Wahrscheinlichkeit Zahl zeigt.**

Verteilung:

Wurf (K=Kopf, Z=Zahl)	KK	KZ	ZK	ZZ
Wert von X	$X = 15$	$X = 0$	$X = 0$	$X = -10$
P(X=...)	$0.4^2 = 0.16$	$0.4\cdot 0.6 = 0.24$	$0.6\cdot 0.4 = 0.24$	$0.6^2 = 0.36$

$\Rightarrow E(X) = 15\cdot 0.16 + (-10)\cdot 0.36 = \underline{\underline{-1.2 \text{ (Franken)}}}$

(b) **Von einer geometrischen Folge, die aus lauter positiven Gliedern besteht, kennt man das erste und das fünfte Glied: $a_1 = 9072$ und $a_5 = 4375$. Wie gross ist die Summe der ersten 50 Glieder der Folge in Prozent der Totalsumme aller Glieder ? Wieviele Glieder dieser Folge sind grösser als 2 ?**

$$q = \sqrt[5-1]{\frac{a_5}{a_1}} = \sqrt[4]{\frac{4375}{9072}} = \frac{5}{6} \quad \text{(q: Quotient der GF)}$$

$$s_{50} = 9072 \cdot \frac{1-(\frac{5}{6})^{50}}{1-\frac{5}{6}} = 54426.0187 \quad \text{(einsetzen in die Teilsummenformel)}$$

$$s = \frac{9072}{1-\frac{5}{6}} = 54432 \quad \text{(unendliche Summe der geometrischen Folge)}$$

$$\Rightarrow \frac{s_{50}}{s} = \underline{\underline{99.989\%}}$$

<u>ges.:</u> das grösste n, mit $a_n \geq 2$:

$a_1\cdot q^{n-1} \geq 2 \;\Rightarrow\; 9072\cdot(\frac{5}{6})^{n-1} \geq 2$ bzw. $(\frac{5}{6})^{n-1} \geq \frac{2}{9072}$ Logarithmieren führt zu:

$(n-1)\cdot\ln(\frac{5}{6}) \geq \ln(\frac{2}{9072})$ Auflösen (Vorsicht $\ln(\frac{5}{6})$ ist negativ) führt zu: $n \leq 47.181$

<u>Also sind 47 Glieder grösser als 2</u>