Maturitätsprüfung 2016 / Mathematik

GYMNASIUM MUTTENZ

(Profile E, I, L, M, S, W, Z)

Kandidatin / Kandidat

Name Vorname: .... Klasse: ....

Hinweise:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Es können maximal 48 Punkte erreicht werden.
- Der Lösungsweg muss bei allen Aufgaben ersichtlich und vollständig sein. Der Einsatz des Taschenrechners (TI-nspire cx CAS) ist klar anzugeben. Zu Beginn der Prüfung muss der Speicher des Taschenrechners vollständig gelöscht sein.
- Teil 1: Sie erhalten die Aufgaben (1), (2), (3) und (4), die Sie mit Hilfe des Taschenrechners und der Formelsammlung (von Adrian Wetzel) lösen.
- Teil 2: Nach Abgabe des Taschenrechners erhalten Sie die Aufgaben (5) und (6), zu deren Lösung nur noch die Formelsammlung als einziges Hilfsmittel zugelassen ist. Die anderen Aufgaben dürfen Sie bei Bedarf ohne Taschenrechner weiterbearbeiten. Am Ende der Prüfung werden alle Lösungen der Aufgaben zusammen abgegeben.

Klassen / ExaminatorIn / Experte

Klasse	Examinator	Experte
4BW		
4BZ		
4E		
4ILM		
4S		
4Wa		
4Wd		

Bewertung (Details siehe Lösungen)

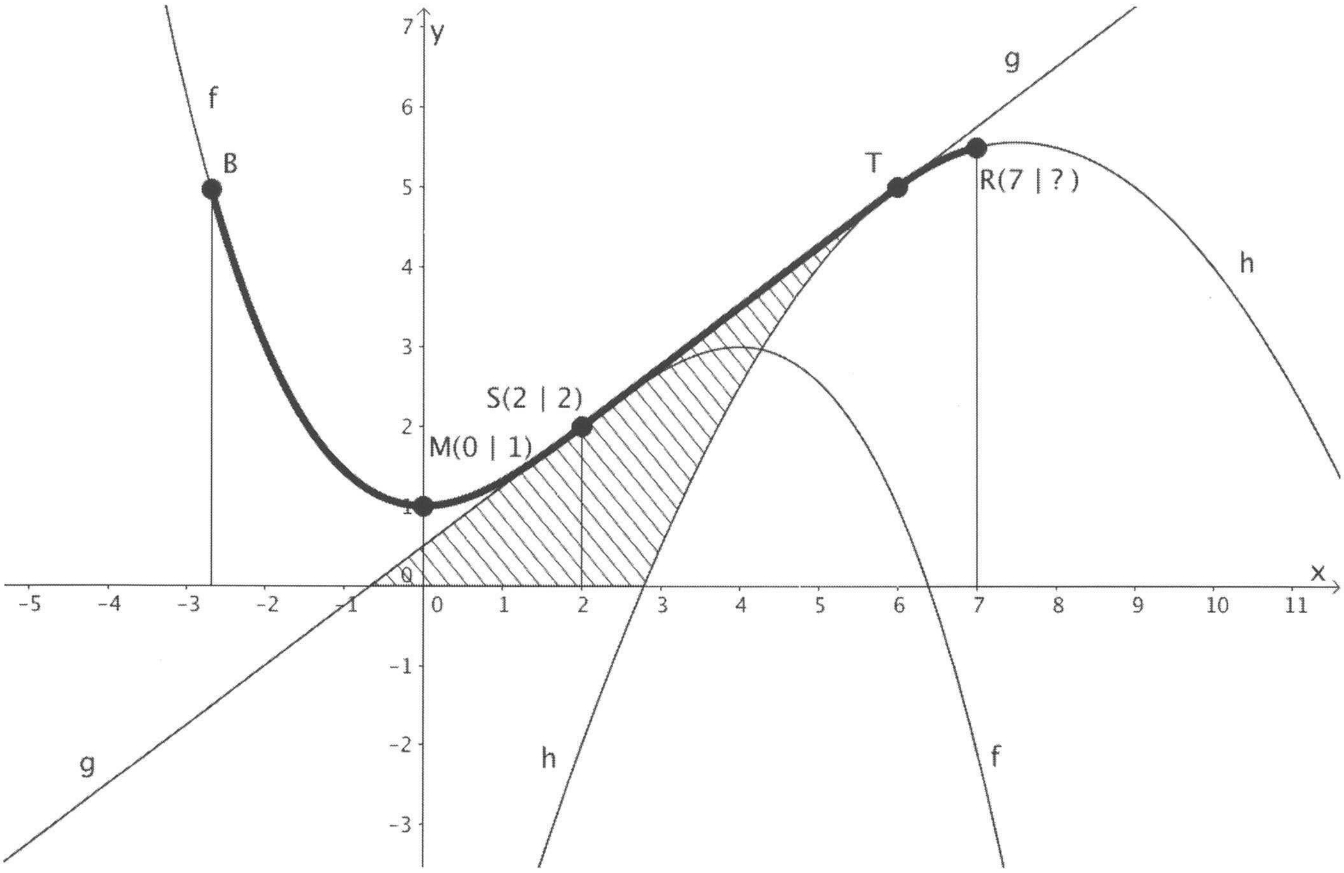
Aufgabe	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	Punktesumme
mögliche Punkte	9	5	6	10	10	8	48
erreichte Punkte							

Note $= \left(\frac{\text{Punktesumme} \cdot 5}{41} + 1\right)$, gerundet auf halbe Noten →

Aufgabe 1 (mit Taschenrechner) *9 Punkte*

Die Funktion g ist gegeben durch die folgende Gleichung: $g(x) = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2}$

Die Funktion h ist gegeben durch die folgende Gleichung: $h(x) = \frac{-1}{4} \cdot x^2 + \frac{15}{4} \cdot x - \frac{17}{2}$



1.1 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes T der Graphen von g und h und zeigen Sie, dass der Graph von g die Tangente an den Graphen von h im Punkt T ist. *(2.5 P.)*

1.2 Berechnen Sie die durch die x-Achse, die Gerade g und die Parabel h begrenzte Fläche (dies entspricht der schraffierten Fläche in der Abbildung oben). *(2.5 P.)*

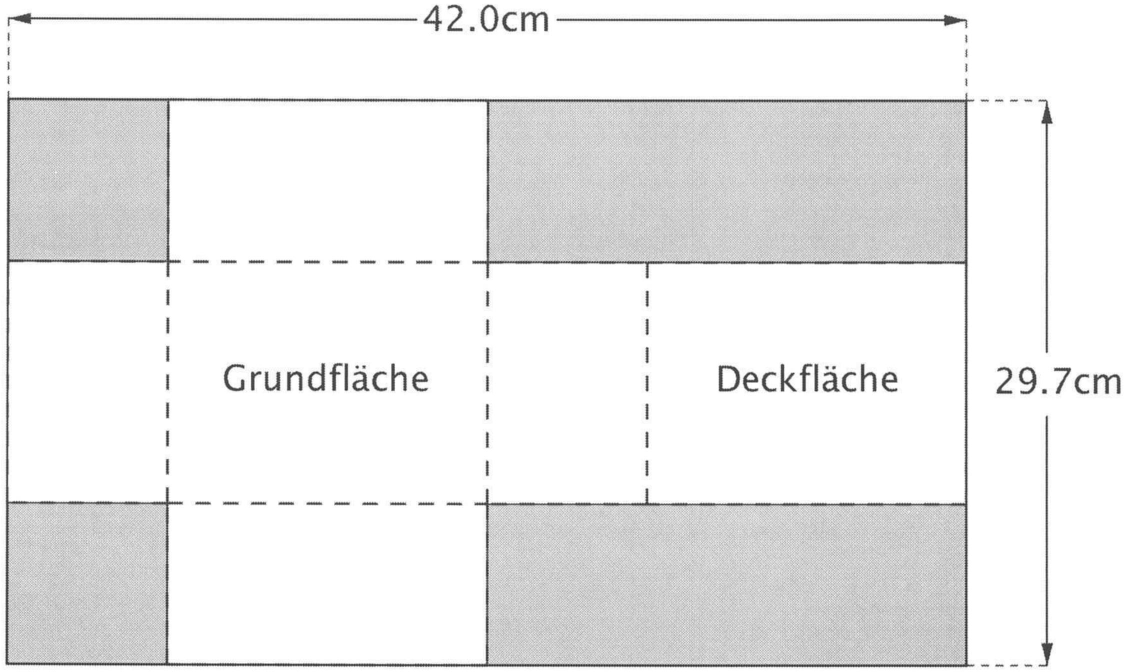
Die Verbindung (dicke Linie) der Punkte B-M-S-T-R auf den Graphen von f, g und h rotiert um die x-Achse. Dadurch entsteht der Mantel eines Trinkgefässes.
Der Bereich begrenzt durch B-M-S besteht aus massivem Glas und stellt den Fuss des Gefässes dar.
Der Bereich begrenzt durch S-T-R kann Flüssigkeit aufnehmen.

1.3 Wie viel Flüssigkeit (Volumen) kann das Gefäss in der Begrenzung S-T-R maximal aufnehmen?
Hinweis: Die Wanddicke wird vernachlässigt. *(1.5 P.)*

1.4 Die Funktion f ist ein Polynom 3. Grades ($y = f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$). Der Punkt $M(0|1)$ ist das lokale Minimum (Tiefpunkt) des Graphen von f. Der Graph von g ist die Tangente in $S(2|2)$ an den Graphen von f.
Berechnen Sie a, b, c und d. *(2.5 P.)*

Aufgabe 2 (mit Taschenrechner) *5 Punkte*

Eine Box mit Deckel wird aus einem rechteckigen Karton mit den Seitenlängen 42.0cm und 29.7cm hergestellt. Die in der Abbildung grau hinterlegten Stücke werden ausgeschnitten und entlang der gestrichelten Linien wird gefaltet.



2.1 Berechnen Sie das Volumen der Box wenn die Höhe 4cm beträgt. *(1.5 P.)*

2.2 Nun soll eine Box mit maximalem Volumen erstellt werden. Wie hoch muss die Box sein und wie gross sind Länge und Breite der Box? Berechnen Sie zudem das maximale Volumen. *(3.5 P.)*

Aufgabe 3 (mit Taschenrechner) *6 Punkte*

Ein Ball wird senkrecht aus einer Höhe von 2.5 m fallen gelassen. Jedes Mal, wenn er auf den Boden auftrifft, springt er wieder hoch und erreicht jeweils 85% der vorherigen Höhe.

3.1 Wie hoch springt der Ball direkt **nach dem** 15. Bodenkontakt? *(1 P.)*

3.2 Welche Gesamtstrecke legt er **bis zum** 15. Bodenkontakt zurück? *(2 P.)*

3.3 Welche Gesamtstrecke legt er zurück, wenn er auf die beschriebene Weise unendlich weiter springt? *(2 P.)*

3.4 Welche prozentuale Höhe erreicht ein anderer Ball nach jedem Bodenkontakt, wenn die Gesamtstrecke (bei unendlichem Weiterspringen mit gleicher Anfangshöhe) bei diesem Ball exakt 50 m beträgt? *(1 P.)*

Aufgabe 4 (mit Taschenrechner) *10 Punkte*

Nach Angaben des TNW (Tarifverbund Nordwestschweiz) beträgt der Anteil der „Schwarzfahrer", das sind Fahrgäste, die kein gültiges Billet vorzeigen können, am gesamten Fahrgastaufkommen auf ihren 12 Tramlinien 3%.

Bei einer Kontrolle werden immer 2 verschiedene Tramlinien zufällig herausgepickt, um Schwarzfahrer zu ermitteln.

4.1 Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, bei Kontrollen 2 verschiedene Tramlinien auf dem Netz des TNWs herauszupicken, wenn die Reihenfolge der gewählten Tramlinien keine Rolle spielt? *(1 P.)*

4.2 Wie viele davon bleiben übrig, wenn genau eine der Linien 10, 11 oder 17 dabei sein muss? *(1 P.)*

Zwei Kontrolleure steigen an der Haltestelle „Bahnhof SBB" in ein Tram der Linie 10 und kontrollieren alle 25 Fahrgäste im Wagen. An der Haltestelle „Bankverein" steigen sie in ein Tram der Linie 14 um, in dem sie weitere 18 Fahrgäste kontrollieren.

4.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei dieser Kontrolle zusammen genau 2 Schwarzfahrer ermitteln. *(1.5 P.)*

4.4 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei dieser Kontrolle mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln. *(1 P.)*

4.5 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure erst in der Linie 14 auf mindestens einen Schwarzfahrer treffen. *(1.5 P.)*

4.6 Bestimmen Sie, wie viele Fahrgäste überprüft werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% mindestens ein Schwarzfahrer ermittelt wird. *(1 P.)*

Genaue Untersuchungen zeigen, dass die Anteile der Schwarzfahrer in den verschiedenen Linien deutlich unterschiedlich sind. In der Linie 10 sind 2% Schwarzfahrer zu erwarten, in der Linie 14 dagegen 4%.

4.7 Berechnen Sie aufgrund dieser genaueren Informationen noch einmal die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Kontrolleure bei der oben beschriebenen Kontrolle (siehe 4.4) mindestens einen Schwarzfahrer ermitteln. *(1.5 P.)*

4.8 Zudem wurde festgestellt, dass von den 4% Schwarzfahrern auf der Linie 14 der Anteil der Männer 70% ist. Und dies, obwohl die Linie 14 gleich häufig von Frauen wie von Männern benutzt wird. Der erste Fahrgast, der auf der Linie 14 kontrolliert wurde, war ein Mann. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war er ein Schwarzfahrer? *(1.5 P.)*

Maturitätsprüfung 2016

Mathematik (Profile E, I, L, M, S, W, Z)

Kandidatin / Kandidat

Name Vorname: .... Klasse: ....

Teil 2 ohne Taschenrechner

Aufgabe 5 (ohne Taschenrechner) *10 Punkte*

Gegeben sind die drei Punkte A(2|2|0), B(4|0|1) und C(0|1|2).

5.1 Die Punkte A und B liegen in der Ebene E: $x+2y+2z-6=0$.
Beweisen Sie rechnerisch, dass auch der Punkt C in der Ebene E liegt. *(1 P.)*

5.2 Berechnen Sie den Abstand von D(1|1|1) zur Ebene E. *(1.5 P.)*

5.3 Geben Sie einen Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene E an.
Zeigen Sie rechnerisch, dass er senkrecht zum Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht. *(1.5 P.)*

5.4 Ein Lichtstrahl beginnt im Punkt P(7|2|2) und wird im Punkt S(2|1|1) der Ebene E gespiegelt.
Bestimmen Sie rechnerisch eine Parametergleichung der Geraden g, auf der sich der reflektierte Lichtstrahl befindet. *(4 P.)*

5.5 Die Ebene E schliesst mit den drei Koordinatenebenen eine dreiseitige Pyramide ein.
Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide. *(2 P.)*

Aufgabe 6 (ohne Taschenrechner) *8 Punkte*

Bei den Aussagen 6.1 bis 6.13 müssen Sie jeweils ankreuzen, ob sie WAHR oder FALSCH sind.
Bei den Aussagen 6.14 bis 6.16 müssen Sie diejenige Funktion ankreuzen, die die vorgegebene Bedingung erfüllt.
Die Bewertung erfolgt nach folgendem Schema:

richtige Antwort: *+0.5 P*
falsche Antwort: *-0.5 P* (die ersten 3 falschen Antworten ergeben keinen Abzug)
keine Antwort: *0 P.*

Das Minimum der Punktsumme beträgt *0 Punkte*.

		WAHR	FALSCH
6.1	Polynomfunktionen vom Grad 3 haben immer 3 verschiedene Nullstellen.	❑	❑
6.2	Polynomfunktionen vom Grad 3 können, müssen aber keinen Wendepunkt haben.	❑	❑
6.3	Die Funktion $f(x) = -2x^3 - 4x^2 + 0.5x - 1$ hat den y-Achsenabschnitt 1.	❑	❑
6.4	Die Funktion $f(x) = 2x^2$ ist monoton wachsend.	❑	❑
6.5	Jeder Sattelpunkt eines Graphen ist automatisch auch ein Wendepunkt.	❑	❑
6.6	Die 10. Ableitung von e^{2x} ist $2^{10} \cdot e^{2x}$. (e ist die Eulersche Zahl)	❑	❑
6.7	Die 2016. Ableitung von $\sin(x)$ ist $-\sin(x)$.	❑	❑
6.8	Für jede arithmetische Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ bildet die Folge $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \ldots$ auch eine arithmetische Folge.	❑	❑
6.9	Falls in einer arithmetischen Folge bestehend aus ganzen Zahlen a_1 und a_4 gerade sind, ist immer auch a_{17} gerade.	❑	❑
6.10	In einer geometrischen Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ mit $a_2 \neq 0$ ist $\frac{a_5}{a_2}$ immer positiv.	❑	❑
6.11	Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dieselbe Richtung haben, folgt immer: $\vec{a} = \vec{b}$	❑	❑
6.12	Es gilt immer: $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$	❑	❑
6.13	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ist ein Vektor.	❑	❑

Die Aufgabe 6 wird auf der nächsten Seite fortgesetzt...

Aufgabe 6 (ohne Taschenrechner) / Fortsetzung

Gegeben sind die Funktionsgleichungen von drei gebrochen rationalen Funktionen:

$$f(x)=\frac{3\cdot x^2}{x^3+1} \quad ; \quad g(x)=\frac{x^3-x^2+2\cdot x}{(x-3)\cdot(x-4)} \quad ; \quad h(x)=\frac{(4\cdot x-8)\cdot(x+2)}{x^2+1}$$

Bei den folgenden Fragen ist jeweils eine Antwort richtig.
Kreuzen Sie jeweils die richtige Antwort (aus 3 Vorschlägen) an:

		f(x)	g(x)	h(x)
6.14	Welche Funktion besitzt die grösste Anzahl von verschiedenen reellen Nullstellen?	❑	❑	❑
6.15	Welche Funktion besitzt keine vertikale Asymptote (Pol)?	❑	❑	❑
6.16	Bei welcher Funktion ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote?	❑	❑	❑

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!