Gymnasium Muttenz Maturitätsprüfung 2016
Mathematik Profile A und B

Name, Vorname:...	Klasse:...............

Hinweise:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Es können maximal 48 Punkte erreicht werden.
- Es werden alle Aufgaben bewertet.
- Der Lösungsweg muss bei allen Aufgaben ersichtlich und vollständig sein. Der Einsatz des CAS-Rechners ist klar anzugeben.

Vorgehen:

- **Teil A:** Sie erhalten die Aufgaben (1), (2) und (3), die Sie mit Hilfe des CAS-Rechners und der Formelsammlung (FS A. Wetzel) lösen.
- **Teil B:** Nach Abgabe des CAS-Rechners erhalten Sie die Aufgaben (4) und (5), zu deren Lösung nur noch die Formelsammlung als einziges Hilfsmittel zugelassen ist. Die Aufgaben (1), (2) und (3) dürfen Sie bei Bedarf ohne Rechner weiterbearbeiten. Am Ende der Prüfung werden alle Lösungen der Aufgaben zusammen abgegeben.

Klasse	**Examinatorin/Examinator**	
4A		
4B		
4BW		
4BZ		

Bewertung:

Aufgabe	**Anzahl erreichte Punkte**
(1) Analysis 4P / Kegelschnitte 3P / Folgen & Reihen 3P	
(2) Analysis & Komplexe Zahlen 10P	
(3) Stochastik 10P	
(4) Vektorgeometrie 7P / Analysis 3P	
(5) Alle Themen 8P	
Punktesumme:	
$Note = \frac{Punktesumme \cdot 5}{40} + 1$ gerundet auf halbe Noten **Note:**	

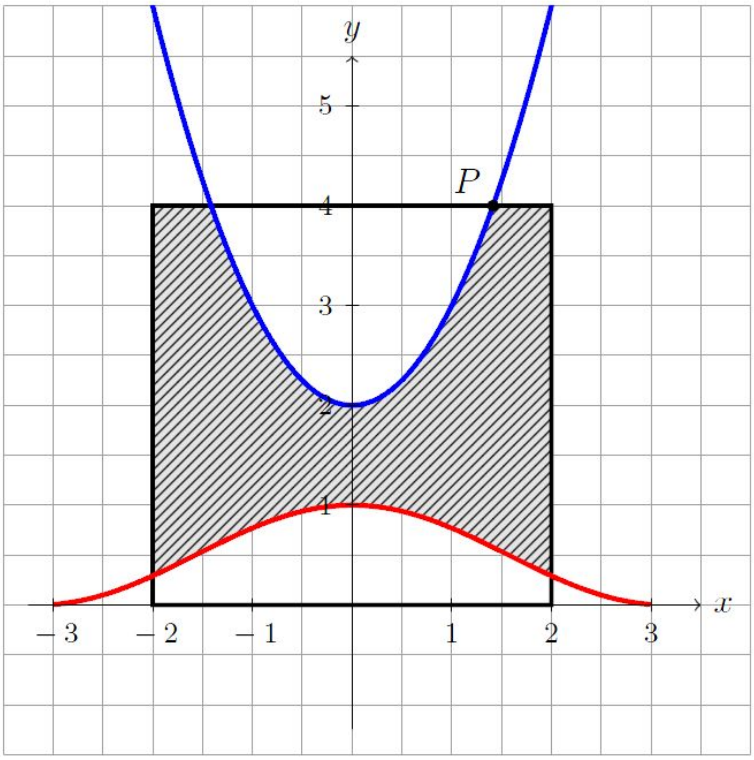
Teil A mit Rechner

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Kurzaufgabe 1.1

Dargestellt sind die Graphen der beiden Funktionen f und g.

$$f : y(x) = x^2 + 2 \text{ und } g : y(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(x) + \frac{1}{2}$$



(a) Berechnen Sie den spitzen Winkel α unter dem sich die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_P|4)$ (im ersten Quadranten) und die x-Achse schneiden. [1.5P]

(b) Die Graphen von f und g begrenzen im Quadrat mit den Eckpunkten $(-2|0)$, $(2|0)$, $(2|4)$ und $(-2|4)$ die in der Skizze schraffierte Fläche. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Fläche. [2.5P]

Kurzaufgabe 1.2

Die Ellipse mit der Gleichung $3x^2+5y^2 = 120$ und eine Hyperbel H haben die Brennpunkte sowie den Punkt $P(5|3)$ gemeinsam. Bestimmen Sie eine Gleichung für H. [3P]

Kurzaufgabe 1.3

Es seien unendlich viele Kreise gegeben, deren Radien eine abnehmende geometrische Folge bilden. Die Summe der Radien der beiden grössten Kreise ist gleich gross wie die Summe aller übrigen Radien. Bestimmen Sie den Quotienten q dieser geometrischen Folge. [3P]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M(0|0)$ geht durch die Punkte $A(-5|5)$ und $B(5|-5)$. Weiter dargestellt ist der Graph einer Polynomfunktion 3. Ordnung f, der den Kreis in A tangential berührt und in B senkrecht schneidet (s. Abbildung 1).

(a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von f. [2P]

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben $f : y(x) = \frac{1}{50} \cdot x^3 - \frac{1}{10} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{5}{2}$ falls Sie Aufgabe (a) nicht lösen konnten.

(b) Berechnen Sie den Inhalt der in Abbildung 1 hervorgehobenen Fläche. [1P]

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes auf dem Graphen von f, der dem Ursprung am nächsten liegt. [2P]

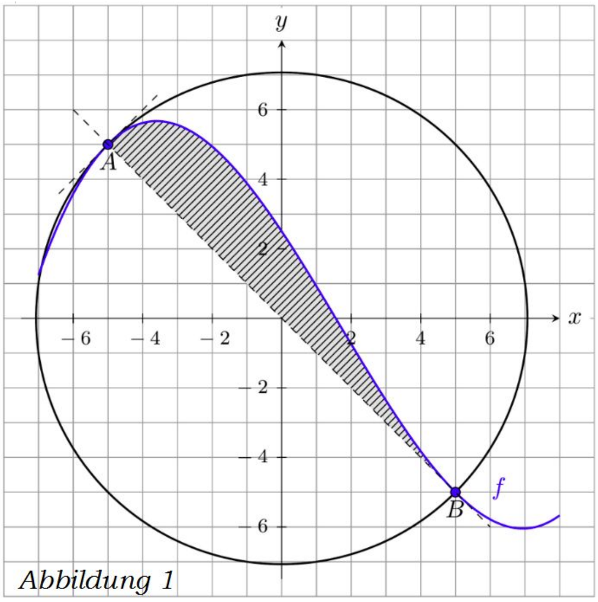


Abbildung 1

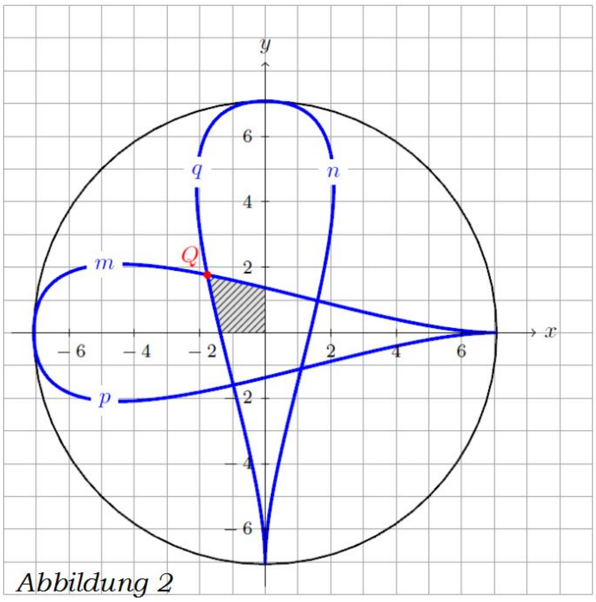


Abbildung 2

Durch Drehen des Graphen von f um 45° bzw. -45° um den Ursprung entstehen die Kurven m bzw. n . Durch Spiegelung von m bzw. n an der $x-$ bzw. $y-$Achse entstehen die Kurven p bzw. q (s. Abbildung 2).

(d) Geben Sie für m eine komplexwertige Funktionsgleichung an. [1P]

(e) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes Q. [2P]

(f) Die Koordinatenachsen begrenzen mit m und q im 2. Quadranten die schraffiert dargestellte Fläche (s. Abbildung 2). Berechnen Sie deren Inhalt. [2P]

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die beiden Räder eines Fahrrads sind mit je einem Zahlenschloss gesichert. Jedes Zahlenschloss lässt sich mit einem fünfstelligen Code öffnen, wobei die erste Ziffer jeweils keine Null ist.

(a) Leo Langfinger vermutet, dass der Code beim ersten Schloss eine gerade Zahl ist und der Code beim zweiten Schloss aus lauter verschiedenen Ziffern besteht. Falls Leo Langfinger richtig vermutet: Wie viele Codes müsste er höchstens durchprobieren bis beide Schlösser offen sind? [1.5P]

(b) Die beiden Codes seien zufällige fünfstellige Zahlen über die nichts weiter bekannt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stimmen sie an genau einer Stelle überein? [2P]

(c) Wenn Leo Langfinger versucht ein Velo zu stehlen, gelingt ihm das jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.3$. In einer Nacht versucht er sich an 10 Fahrrädern. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt es ihm, mehr als die Hälfte davon zu stehlen? [1.5P]

(d) Wenn Ronny Räuber ein Velo stehlen will, ist er etwas weniger erfolgreich als Leo Langfinger und es gelingt ihm jeweils nur mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$. In einer Nacht versucht sich zuerst Leo Langfinger an 10 Fahrrädern, anschliessend macht Ronny Räuber seine Runde bei den noch nicht von Leo Langfinger gestohlenen Velos. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird in dieser Nacht genau ein Velo gestohlen? [2.5P]

(e) In einer Stadt sind alle Velos mit einem Zahlenschloss ausgerüstet. 40% der roten Velos besitzen einen geraden Code. Von den übrigen Velos haben nur 30% einen geraden Code. In dieser Stadt gilt: Wenn ein zufällig ausgewähltes Velo einen geraden Code hat, dann ist es mit der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1009}{2016}$ rot. Bestimmen Sie den Anteil der roten Velos in dieser Stadt. [2.5 Punkte]

Teil B ohne Rechner

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Kurzaufgabe 4.1

Gegeben ist der Punkt $M(2|4|1)$ und die Gerade g

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, so dass g senkrecht zu E verläuft und M ein Punkt der Ebene E ist. [1P]

(b) Ein Quadrat mit dem Mittelpunkt M hat einen Eckpunkt auf der Geraden g und liegt in der Ebene E. Berechnen Sie die Koordinaten von 2 Eckpunkten dieses Quadrates. [2P]

Kurzaufgabe 4.2

Der Punkt $P(7|1|5)$ liegt auf einer Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(3|1|2)$.
Weiter gegeben ist die Ebene $E_c : 2x + 3y + 6z - 7c = 0$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(3|10|14)$ ausserhalb der Kugel K liegt. [1P]

(b) Für welche Werte von c berühren sich die Kugel K und die Ebene E_c? [3P]

Kurzaufgabe 4.3

Bestimmen Sie alle Zahlen a, so dass gilt:

$$\int_0^a (1 + 2016 \cdot x)dx = 2016 \cdot a^2 \text{ [3P]}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

Bewertung:

- Jede richtig angekreuzte Teilaufgabe ergibt 0.5 Punkte.
- Die ersten 4 falsch angekreuzten Aufgaben ergeben keinen Punkteabzug.
- Weitere falsche Antworten ergeben je 0.5 Punkte Abzug.
- Keine Antwort ergibt 0 Punkte.
- Die minimal mögliche Punktzahl dieser Aufgabe beträgt 0 Punkte.

(a) Der Vektor $\vec{v}$ steht senkrecht auf der Ebene E. ☐ wahr ☐ falsch

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ 22 \end{pmatrix}$ E: $-2 \cdot x + y - 3 \cdot z + 4 = 0$

(b) $\int_{\pi}^{4\pi} \sin(x)dx < 0$ ☐ wahr ☐ falsch

(c) Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ folgt $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ ☐ wahr ☐ falsch

(d) $\sqrt{2016} \notin \mathbb{Q}$ ☐ wahr ☐ falsch

(e) $\sqrt[10]{10} > \sqrt[3]{2}$ ☐ wahr ☐ falsch

(f) Gegeben ist ein Polynomfunktion $f(x)$. Wenn $f(2) \cdot f'(2) = 0$ ist, dann besitzt der Graph von f bei $x = 2$ ein Minimum oder ein Maximum. ☐ wahr ☐ falsch

(g) Der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 2016 besitzt mindestens eine Stelle mit der Steigung 0. ☐ wahr ☐ falsch

(h) In einer arithmetischen Folge ist $a_1 = 2016$ und d eine ungerade Zahl. Dann ist a_{2016} ebenfalls eine ungerade Zahl. ☐ wahr ☐ falsch

(i) In einer geometrischen Folge ist $a_1 = 2016$ und q eine ungerade Zahl. Dann ist a_{2016} ebenfalls eine ungerade Zahl. ☐ wahr ☐ falsch

Beachten Sie die weiteren Teilaufgaben auf der nächsten Seite!

(j) Für jede komplexe Zahl z gilt: $-2016 \cdot |z| \leq 0$ ☐ wahr ☐ falsch

(k) Für jede komplexe Zahl z gilt: $Re(z+1) = Im(z+i)$ ☐ wahr ☐ falsch

(l) Für jede komplexe Zahl z gilt: $Im(z+i) = Im(z) + 1$ ☐ wahr ☐ falsch

(m) $i^{2016} = i^{4444}$ ☐ wahr ☐ falsch

(n) Der Graph der Funktion $f(t) = (t + i \cdot t^2) \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ entspricht einer um 45° um den Ursprung gedrehten Parabel. ☐ wahr ☐ falsch

(o) Der Graph der Funktion $f(t) = (t + i \cdot t^2) \cdot e^{i\frac{2\pi}{6}} \cdot (\cos(\frac{2\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{6}))$ entspricht einer um 60° um den Ursprung gedrehten Parabel. ☐ wahr ☐ falsch

(p) Die Gleichung $x^2 + x + (a \cdot y)^2 + y - 12 = 0$ beschreibt für alle reellen Werte von a eine Ellipse. ☐ wahr ☐ falsch