Gymnasium Muttenz Maturitätsprüfung 2015
Mathematik Profile A und B

Name, Vorname:..	Klasse:..............

Hinweise:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Es können maximal 48 Punkte erreicht werden.
- Es werden alle Aufgaben bewertet.
- Der Lösungsweg muss bei allen Aufgaben ersichtlich und vollständig sein. Der Einsatz des CAS-Rechners ist klar anzugeben.

Vorgehen:

- **Teil A:** Sie erhalten die Aufgaben (1), (2) und (3), die Sie mit Hilfe des CAS-Rechners und der Formelsammlung (FS A. Wetzel, 4. Auflage) lösen.
- **Teil B:** Nach Abgabe des CAS-Rechners erhalten Sie die Aufgaben (4) und (5), zu deren Lösung nur noch die Formelsammlung als einziges Hilfsmittel zugelassen ist. Die Aufgaben (1), (2) und (3) dürfen Sie bei Bedarf ohne Rechner weiterbearbeiten. Am Ende der Prüfung werden alle Lösungen der Aufgaben zusammen abgegeben.

Klasse	**Examinatorin/Examinator**	
4AZ		
4B		
4BS		

Bewertung:

Aufgabe	**Anzahl erreichte Punkte**
(1) Analysis 10P	
(2) Komplexe Zahlen 10P	
(3) Stochastik 10P	
(4) Vektorgeometrie 6P / Komplexe Zahlen 4P	
(5) Kegelschnitte 4P, Folgen & Reihen 4P	
Punktesumme:	
$Note = \frac{Punktesumme \cdot 5}{40} + 1$ gerundet auf halbe Noten **Note:**	

Teil A mit Rechner

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch:

$f(x) = \frac{120\cdot(x-120)^2}{(x-120)^2+7200} + 10$ und

$g(x) = -0.015x^2 + 0.15x + 95$ mit $0 \leq x \leq 130$.

Ihre Graphen seien K_f und K_g.
Eine Skisprunganlage besteht aus Sprungschanze und Aufsprunghang. K_f beschreibt das Profil des Aufsprunghangs, K_g die Flugbahn eines Skispringers bis zum Aufsprungpunkt S auf dem Hang (x, $f(x)$ und $g(x)$ in Metern). Der Absprung erfolgt im Punkt $(0|g(0))$.

(a) Zeichnen Sie K_f und K_g in dasselbe kartesische Koordinatensystem ein und markieren Sie darin den Aufsprungpunkt S (x, y-Achse: 20 Meter $\widehat{=}$ 2 Häuschen). [1.5 Punkte]

(b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, an dem der Springer auf dem Aufsprunghang aufsetzt. [1 Punkt]

(c) Wie gross ist die maximale vertikal gemessene Höhe des Springers über dem Aufsprunghang? [2 Punkte]

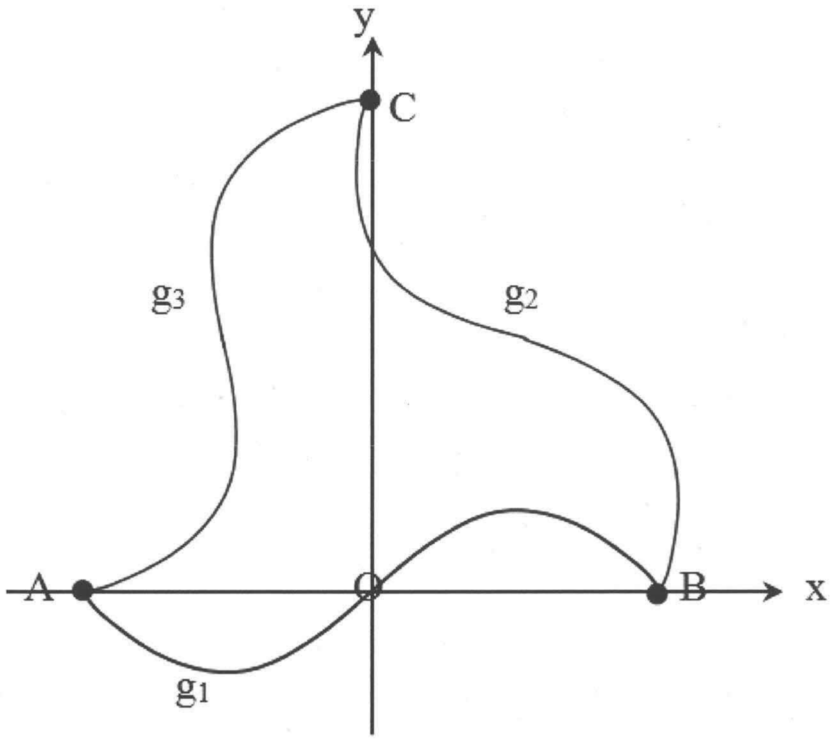
(d) Der Wendepunkt $W(71|40)$ von K_f entspricht dem kritischen Punkt des Aufsprunghangs, weil dort dessen Gefälle am grössten ist. Wie gross ist in W der Neigungswinkel des Aufsprunghangs gegenüber der Horizontalen? [1.5 Punkte]

(e) Die Querschnittsfläche des Aufsprunghügels wird im Bereich $0 \leq x \leq 130$ durch K_f und die x-Achse berandet. Die Breite des Aufsprunghangs beträgt überall 45 m. Aus wie vielen m^3 Erdreich besteht der gesamte Aufsprunghügel? [1.5 Punkte]

(f) Welcher Teil des Graphen K_f im Bereich $0 \leq x \leq 130$ ist vom Punkt $(0|95)$ aus nicht sichtbar? [2.5 Punkte]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Der Graph von A über O nach B entspricht der Sinusfunktion $g_1(x) = sin(x)$ für $-\pi \leq x \leq \pi$.



(a) Beschreiben Sie g_1 durch eine komplexwertige Funktion $z_1(t)$. [1 Punkt]

(b) Um welchen Punkt D muss g_1 im mathematisch positiven Sinn gedreht werden, um zuerst mit g_2 und danach mit g_3 zur Deckung zu kommen? [1.5 Punkte]

(c) Bestimmen Sie für g_2 die komplexwertige Funktionsgleichung $z_2(t)$. [2.5 Punkte]

(d) Bestimmen Sie den Radius des kleinsten Kreises mit Mittelpunkt D, der alle drei Graphen g_1, g_2 und g_3 berührt. [2.5 Punkte]

(e) Berechnen Sie die Koordinaten eines Punktes P auf g_2 so, dass dort die Tangentensteigung $m = -1$ ist (Hinweis: es ist nur eine Lösung verlangt). [2.5 Punkte]

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Würfel A trägt auf einer Seite eine 1, auf zwei Seiten eine 2 und auf drei Seiten eine 3. Würfel B trägt auf einer Seite eine 3, auf zwei Seiten eine 2 und auf drei Seiten eine 1.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 3 Würfen mit dem Würfel B immer die 3 erscheint? [0.5 Punkte]

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 3 Würfen mit dem Würfel B die 1 nie auftritt? [0.5 Punkte]

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Würfen mit dem Würfel A höchstens zweimal die 2 vorkommt? [2 Punkte]

(d) Wie oft muss Würfel A mindestens geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens zweimal eine 1 erscheint? [2.5 Punkte]

(e) Bei einem Spiel werden beide Würfel geworfen. Beträgt die Augensumme 6, so bekommt der Spieler 1.- Franken ausbezahlt. Beträgt die Augensumme 5, so bekommt er ebenfalls 1.- Franken ausbezahlt. Beträgt die Augensumme 2, so muss der Spieler 4.- Franken bezahlen. Wird eine andere Augensumme gewürfelt, so bekommt der Spieler nichts, muss aber auch nichts bezahlen. Beurteilen Sie rechnerisch, ob es sich um ein faires Spiel handelt. [2.5 Punkte]

(f) Bei einem Spiel mit dem Würfel A gelten folgende Regeln: Wer eine 1 wirft, gewinnt einen Preis. Wer eine 2 wirft, darf nochmals würfeln (auch ein drittes, viertes usw. Mal). Wer eine 3 wirft, erhält keinen Preis. Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit für den Preis. [2 Punkte]

Teil B ohne Rechner

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Kurzaufgabe 4.1

(a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E mit den Achsenabschnitten $a = 8$, $b = 2$ und $c = 1$. [1 Punkt]

(b) Welchen Abstand hat der Punkt $A(8|8|8)$ von der Ebene E? [2.5 Punkte]

(c) A, B und C seien die zur Ebene E gehörenden Achsenabschnittspunkte. Bestimmen Sie einen Punkt P auf der Verbindungsstrecke BC derart, dass P mit dem Punkt $Q(8|5|8)$ einen zum Vektor $\overrightarrow{BC}$ senkrechten Vektor bildet. Geben Sie die Koordinaten von P an. [2.5 Punkte]

Kurzaufgabe 4.2

Veranschaulichen Sie die folgende Punktmenge M in der komplexen Zahlenebene:

$$M = \{z \in \mathbb{C} | \quad -1 \leq Im\left((1-i) \cdot z\right) \leq 0 \quad \wedge \quad |Re(z)| \leq 2\} \text{ [4 Punkte]}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Kurzaufgabe 5.1

Wir betrachten die Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$.

(a) Skizzieren Sie den Graphen (Einheit = 2 Häuschen). [1 Punkt]

(b) Konstruieren Sie einen Punkt dieser Hyperbel in allgemeiner Lage. [1 Punkt]

(c) Die Hyperbel begrenzt im ersten und vierten Quadranten des Koordinatensystems zusammen mit ihren Asymptoten und der Geraden $x = 2$ eine endliche Fläche F. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der sich ergibt, wenn F um die x-Achse rotiert. [2 Punkte]

Kurzaufgabe 5.2

Gegeben ist die unendliche geometrische Reihe $S(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} + \frac{1}{4x^6} + \frac{1}{8x^8} + \cdots$

(a) Bestimmen Sie einen Ausdruck für den n-ten Summanden a_n dieser Reihe. [1 Punkt]

(b) Berechnen Sie die beiden Summen $a_1 + a_2$ und $a_1 + a_2 + a_3$ für $x = \frac{1}{2}$. [1 Punkt]

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $S(x)$ konvergent? [2 Punkte]