



**Mathematik Matur**

**Datum: 14.11.2015**

**Zeit: 08:00-12:00**

**Formelsammlung: Adrian Wetzels**

**Taschenrechner: TI-NSpire CAS (nur im Teil 1)**

Name: ....., Klasse: .....

Es gelten die folgenden Bestimmungen:

- Die Prüfung dauert 4 Stunden.
- Die Notenskala ist unten angegeben.
- Ablauf: Im 1. Teil können Sie die Aufgaben 1 bis 3 mit Hilfe Ihres Taschenrechners lösen. Nachdem Sie Ihren Rechner abgegeben haben, erhalten Sie den 2. Teil. Der 2. Teil muss ohne Rechner gelöst werden. Sie können den 1. Teil behalten und weiter lösen. Sie können aber nicht wieder Ihren Rechner beziehen.
- Der Lösungsweg zu allen Aufgaben muss klar und vollständig sein.
- Geben Sie die Benutzung des Rechners an (nur im Teil 1).
- Sie müssen im Teil 2 keine Wurzeln vereinfachen.

<b>Klasse</b>	<b>Examinator</b>	<b>Experte/Expertin</b>
4AZ_Z		
4BS_S		
4E		
4IL		
4MZ		
4Wa		
4Wb		

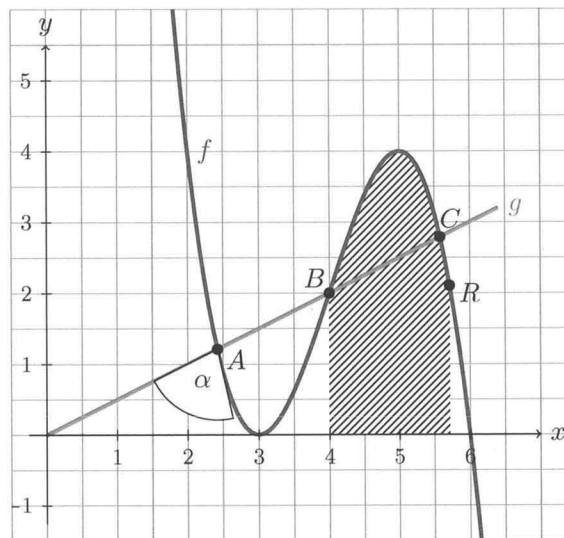
Aufgabe:	1	2	3	4	5	Total
Mögliche Punktzahl:	10	10	10	10	8	48
Erreichte Punktzahl:						

$$\text{Schlussnote} = \frac{\text{erreichte Punkte}}{41} \cdot 5 + 1 \text{ (gerundet auf halbe Noten)} = \boxed{\phantom{00}}$$

**Teil 1: Mit Rechner (TI-Nspire)**

1. (10 Punkte) Betrachten Sie die folgende Zeichnung des Graphen der Funktion

$$f: x \mapsto y = -x^3 + 12 \cdot x^2 - 45 \cdot x + 54.$$



- 1.1. Die Gerade  $g$  verläuft durch den Koordinatenursprung  $(0/0)$  und den Punkt  $B(4/2)$ . Diese Gerade schneidet den Graphen von  $f$  in den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$ . Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes  $A$ , also desjenigen Schnittpunktes mit der kleinsten  $x$ -Koordinate. [2 P.]
- 1.2. Berechnen Sie den spitzen Schnittwinkel  $\alpha$ , unter welchem sich der Graph von  $f$  und die Gerade  $g$  im Punkt  $A$  schneiden. [2 P.]
- 1.3. Wenn die Fläche zwischen der  $x$ -Achse und dem Graphen von  $f$  zwischen  $x = 4$  und der  $x$ -Koordinate von  $R$  (siehe Skizze) um die  $x$ -Achse rotiert wird, ergibt sich ein Rotationskörper mit Volumen [3 P.]

$$V = 61 \text{ [VE]}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von  $R$ .

Die Teilaufgabe 1.4. ist unabhängig von den obigen Teilaufgaben.

- 1.4. Berechnen Sie die Zahlen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  so, dass der Graph der Funktion [3 P.]

$$h: x \mapsto y = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

bei  $T(3/0)$  eine Tiefpunkt und bei  $W(4/3)$  einen Wendepunkt hat.

## 2. (10 Punkte) Die Teilaufgaben 2.1. und 2.2. sind unabhängig voneinander.

- 2.1. Von allen Lernenden des Gymnasiums Muttentz wohnen 24% in Muttentz, wovon 62% Frauen sind. Der Frauenanteil unter den Schülerinnen und Schülern, die nicht in Muttentz wohnen, beträgt 65%. [2.5 P.]

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Schülerin des Gymnasiums Muttentz in Muttentz wohnt.

- 2.2. In einem Becher befinden sich 3 schwarze und 5 weiße faire Spielwürfel. Damit führen wir das folgende zweistufige Zufallsexperiment durch:

**Erste Stufe:** Es werden zwei Würfel aus dem Becher gezogen.

**Zweite Stufe:** Die gezogenen Würfel werden geworfen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in der *ersten Stufe*

- (a) zwei weiße Würfel gezogen werden. [1 P.]  
 (b) mindestens ein weißer Würfel gezogen wird. [1 P.]

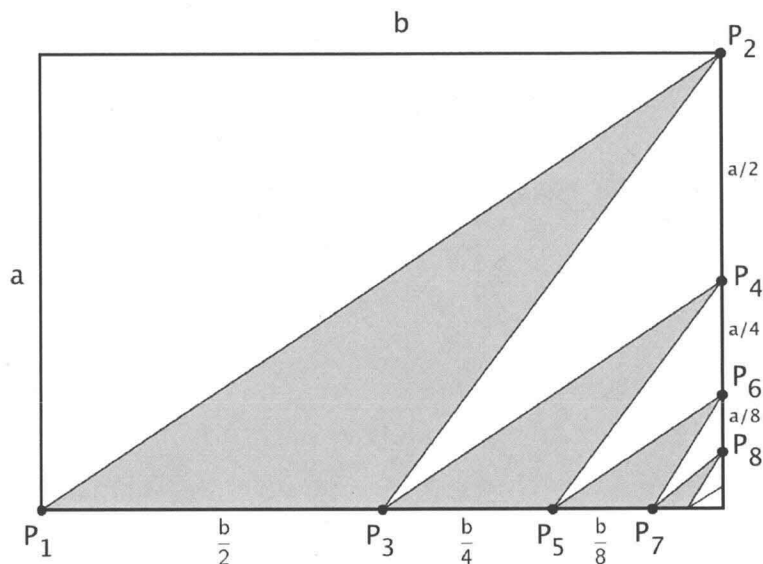
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass im gesamten Zufallsexperiment

- (c) unabhängig von der Farbe mindestens eine Sechse gewürfelt wird. [1.5 P.]  
 (d) zwei weiße Würfel gezogen werden und nach dem Werfen die Augensumme 10 resultiert. [2 P.]  
 (e) mindestens ein weißer Würfel gezogen wird und anschliessend genau eine weiße Sechse gewürfelt wird. [2 P.]

3. (10 Punkte) **Die Teilaufgaben 3.1. und 3.2. sind unabhängig von einander.**

3.1. Im Rechteck mit den Seitenlängen  $a = 2$  und  $b = 3$  wird, von  $P_1$  ausgehend über  $P_2, P_3$  usw., ein Streckenzug mit unendlich vielen Strecken (gemäss Abbildung) eingezeichnet. Die Umfänge der grau hervorgehobenen Dreiecke bilden eine geometrische Folge.

- (a) Berechnen Sie die Summe der Umfänge aller (unendlich vielen) grauen Dreiecke. [2.5 P.]  
 (b) Wie gross ist der gesamte Flächeninhalt aller (unendlich vielen) grauen Dreiecke? [2.5 P.]



3.2. Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f : y = 5 \cdot 3^{-0.4 \cdot x}$ .

- (a) Erstellen Sie in einem Koordinatensystem eine Skizze des Funktionsgraphen von  $f$  zwischen  $x = -1$  und  $x = 7$  (1 Einheit  $\hat{=}$  2 Häuschen). [1 P.]

Im 1. Quadranten liegt ein zu den Koordinatenachsen paralleles Rechteck mit einem Eckpunkt  $P(0/0)$  im Ursprung und einem Eckpunkt  $Q(u/v)$  auf dem Funktionsgraphen.

- (b) Wie gross ist diese Fläche für  $u = 4$ ? [0.5 P.]  
 (c) Für welchen Wert von  $u$  wird diese Rechtecksfläche möglichst gross? Bestimmen Sie die Koordinaten von  $Q$  und berechnen Sie den Flächeninhalt dieses grösstmöglichen Rechtecks. Der Nachweis des Maximums ist nicht notwendig. [3.5 P.]

**Teil 2: Ohne Rechner**

4. (10 Punkte) Die drei Aufgaben 4.1., 4.2. und 4.3. sind unabhängig voneinander.

4.1. Die Positionen von zwei Helikopter  $X$  und  $Y$  zur Zeit  $t$  Sekunden sind durch

$$X : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 47 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 52 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Einheiten sind in Meter.

(a) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Helikopter zur Zeit  $t = 10$ . [1.5 P.]

(b) Zeigen Sie dass die beiden Helikopter nicht zusammenstossen. [1.5 P.]

4.2. Gegeben  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - m \\ 2 + m \\ 3 + m \end{pmatrix}$  und  $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 - 2m \\ 2 + 2m \\ 3 + 2m \end{pmatrix}$ . Zeigen Sie, dass es keinen Wert für  $m$  gibt [2.5 P.]

so, dass die Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  senkrecht aufeinander stehen.

4.3. Gegeben sind die vier Punkte  $A(1/2/3)$ ,  $B(-5/-1/-3)$ ,  $C(4/8/-3)$  und  $D(1/-7/-6)$ . [4.5 P.]

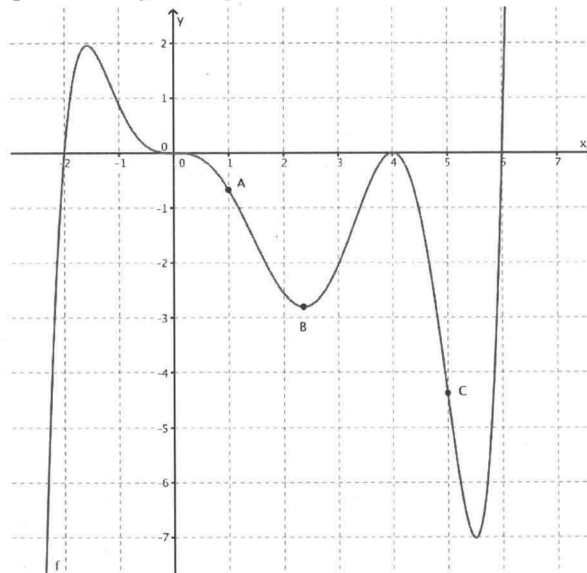
Berechnen Sie das Volumen des (nicht-regelmässigen) Tetraeders  $ABCD$ , wenn die Fläche des Dreiecks  $ABC$  genau  $\frac{81}{2}$  beträgt.

5. (8 Punkte) Entscheiden Sie bei jeder Aussage, ob sie wahr oder falsch ist.

Bewertung:

- Richtige Antwort: +0.5 Punkte
- Die ersten vier falschen Antworten: 0 Punkte
- Weitere falschen Antworten: -0.5 Punkte
- Keine Antwort: 0 Punkte
- Minimal mögliche Punktzahl: 0 Punkte

5.1. Gegeben ist der Graph des Polynoms  $f$ :



Entscheiden Sie, ob die Aussagen über die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  wahr oder falsch sind.

- (a)  $f(x) < 0$  bei  $A$   Wahr  Falsch
- (b)  $f'(x) < 0$  bei  $A$   Wahr  Falsch
- (c)  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$  bei  $B$   Wahr  Falsch
- (d)  $f(x) \cdot f'(x) > 0$  bei  $C$   Wahr  Falsch
- (e)  $\int_{-1}^3 f(x) dx > 0$   Wahr  Falsch
- (f) Diese Funktion erfüllt  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x$ .  Wahr  Falsch



5.2. Die Punkte  $A, B, C, D, E, F, G$  und  $H$  sind die Eckpunkte eines Würfels.

- (a)  $|\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DF}| = |\vec{DG}|$   Wahr  Falsch
- (b)  $\vec{AB} \times \vec{AC}$  ist ein Vektor.  Wahr  Falsch
- (c)  $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AE} = \vec{AG}$   Wahr  Falsch
- (d) Wenn  $|\vec{AB}| = 1$ , dann ist  $|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 1$   Wahr  Falsch
- (e)  $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AE} = 0$   Wahr  Falsch

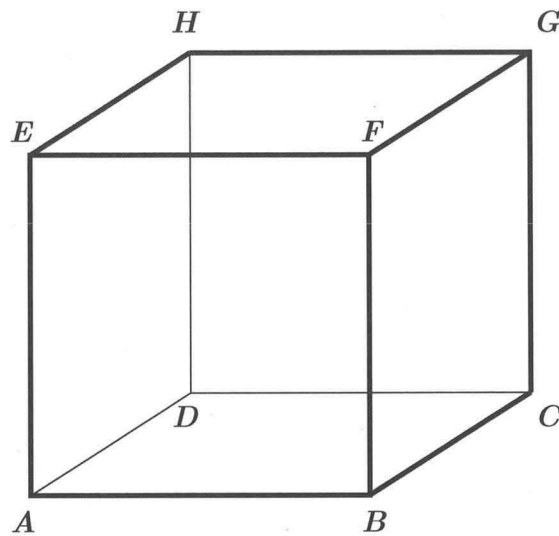


Abbildung 1: Würfel

5.3. Ein Schütze schießt 30 Mal auf ein Ziel. Er trifft das Ziel dabei pro Schuss mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{3}$ .

- (a) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze  Wahr  Falsch  
entweder beim ersten oder beim zweiten  
Schuss trifft ist  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ .
- (b) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Schütze  Wahr  Falsch  
beim ersten und beim zweiten Schuss trifft  
ist  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ .
- (c) Die Wahrscheinlichkeit für genau 15 Tref-  Wahr  Falsch  
fer ist kleiner als für genau 10 Treffer.
- (d) Die Wahrscheinlichkeit für genau 25 Tref-  Wahr  Falsch  
fer ist kleiner als für genau 5 Treffer.
- (e) Falls der Schütze bei den ersten 29  Wahr  Falsch  
Schüssen das Ziel verfehlt hat, ist die  
Wahrscheinlichkeit, dass er gar keinen  
Treffer landet kleiner als 40%.