

Maturitätsprüfungen 2014 – Mathematik schriftlich

Klassen: 4(A)W, 4GL, 4IM, 4IS, 4LZ, 4Sb, 4SW, 4Wb, 5KSW

-
- Bemerkungen: Die Prüfungsdauer beträgt 4 Stunden.
Beginnen Sie jede Aufgabe mit einem neuen Blatt!
- Hilfsmittel: Taschenrechner TI-Nspire CAS
Der Rechner muss im Press-to-Test-Modus sein.
Formelsammlung Fundamentum Mathematik und Physik, Orell Füssli Verlag, ohne Notizen

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

Wir betrachten den Punkt $M(2|5|-1)$ und die Gerade g :

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- a) Der Punkt $P(x_p|y_p|z_p)$ liegt auf der Geraden g . Berechnen Sie x_p und z_p und zeigen Sie, dass der Abstand $\overline{MP} = 6$ ist. (1.5 P.)
- b) Ein anderer Punkt Q der Geraden g hat den gleichen Abstand 6 von M . Berechnen Sie die Koordinaten von Q . (1.5 P.)

Die Ebene E ist gegeben durch die Gerade g und M .

- c) Zeigen Sie, dass $x - 2y + 2z + 10 = 0$ eine Koordinatengleichung von E ist. (2 P.)

Ein gerader Kreiskegel hat die folgenden Eigenschaften:

- Der Grundkreis liegt in der Ebene E mit Zentrum M und geht durch P .
- Die Gerade durch P und die Spitze S des Kegels hat die Gleichung

$$PS: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- d) Berechnen Sie den Winkel α zwischen der Geraden PS und der Ebene E . (1.5 P.)
- e) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S und die Höhe h des Kegels. (3 P.)
- f) Berechnen Sie eine Gleichung einer Ebene F , die den Kegel in zwei Körper mit dem gleichen Volumen teilt. (2.5 P.)

Aufgabe 2: Analysis

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = kx^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, und die Gerade g mit der Gleichung $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

- a) Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Wendepunkt W des entsprechenden Graphen von $f_k(x)$ auf der x -Achse liegt. (2 P.)

Für die folgenden Teilaufgaben gilt $k = \frac{1}{8}$. Der Graph der Funktion $f_{\frac{1}{8}}(x)$ heisst K .

- b) Berechnen Sie die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte von K . (2 P.)
- c) Weisen Sie nach, dass g die Kurve K berührt. (2 P.)
- d) K und g begrenzen ein Flächenstück A . Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A . (2 P.)
- e) Die Kurve K , die Gerade g und die x -Achse begrenzen ein Flächenstück R mit endlichem Flächeninhalt. Wie gross ist das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der Fläche R um die x -Achse entsteht? (2 P.)
- f) Es gibt ausser g noch eine zweite Ursprungsgerade h , welche mit K zusammen genau ein einziges Flächenstück von endlichem Inhalt begrenzt. Berechnen Sie die Steigung von h . (2 P.)

Aufgabe 3: Analysis

Gegeben sind die beiden Funktionen $f(x) = (1 + 2x)e^{-0.5x}$ und $g(x) = e^{-0.5x}$.
Der Graph von $f(x)$ heisst K_f , derjenige von $g(x)$ heisst K_g .

- a) Weisen Sie *von Hand* nach, dass $f(x)$ die 1. Ableitung $f'(x) = (1.5 - x)e^{-0.5x}$ und die 2. Ableitung $f''(x) = (0.5x - 1.75)e^{-0.5x}$ besitzt. (2 P.)
- b) Berechnen Sie die Koordinaten des Maximums und des Wendepunkts von K_f . (2 P.)
- c) Unter welchem Winkel schneiden sich K_f und K_g ? (2.5 P.)
- d) Die Gerade $x = k$ mit $k > 0$ schneidet die Kurven K_f und K_g in den Punkten F und G . Bestimmen Sie k so, dass der Abstand der beiden Schnittpunkte F und G maximal wird. Wie gross ist dieser maximale Abstand? (2 P.)
- e) K_g und die Koordinatenachsen begrenzen ein Flächenstück A , das sich bis ins Unendliche erstreckt. Wie gross ist der Inhalt von A ? (1 P.)
- f) Im Schnittpunkt S der Kurve K_f mit der y -Achse werden die Tangente t und die Normale n an K_f gezogen. t schneidet die x -Achse im Punkt T , n im Punkt N . Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks SNT . (2.5 P.)

Aufgabe 4: Stochastik

In einem Becher A befinden sich drei faire Würfel, in einem Becher B drei gefälschte Würfel. Für die gefälschten Würfel gilt: Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 ist $\frac{1}{2}$, die Wahrscheinlichkeiten für die übrigen Augenzahlen sind je $\frac{1}{10}$.

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Werfen der drei Würfel aus dem Becher A die Augenzahlen 1, 2 und 3 auftreten. (2 P.)
- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Werfen der drei Würfel aus dem Becher A die Summe der Augenzahlen 16 beträgt. (2 P.)
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Werfen der drei Würfel aus dem Becher B die Summe der Augenzahlen 15 beträgt. (3 P.)
- d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim Würfeln mit je einem Würfel aus den beiden Bechern der Würfel aus dem Becher A eine grössere Augenzahl zeigt als der Würfel aus dem Becher B ? (3 P.)
- e) Den beiden Bechern wird je ein Würfel entnommen. Beide Würfel werden mehrere Male geworfen. Wie oft müssen die beiden Würfel geworfen werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Doppelsechser geworfen wird, grösser als 99.5% ist? (2 P.)

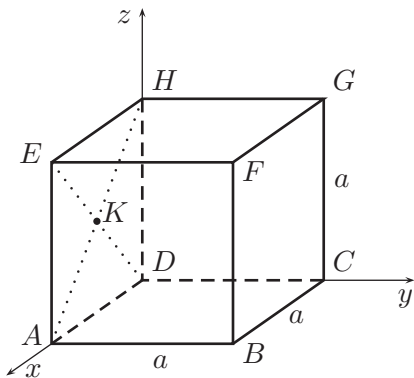
Verschiedene voneinander unabhängige Aufgaben

Aufgabe 5.1

Die Arbeitsgeschwindigkeit von PCs wird durch die Taktrate bestimmt. Im Jahre 1990 betrug sie erst 50 MHz, im Jahr 2000 bereits 1 GHz (1GHz = 1000 MHz). Die Taktrate wächst im Verlauf der Jahre exponentiell.

- Welche Taktrate ist im Jahr 2020 zu erwarten? (2 P.)
- In welcher Zeitspanne verdoppelt sich die Taktrate? (1 P.)
- Wie gross ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in GHz/Jahr) der Taktrate im Jahr 2020? (1 P.)

Aufgabe 5.2

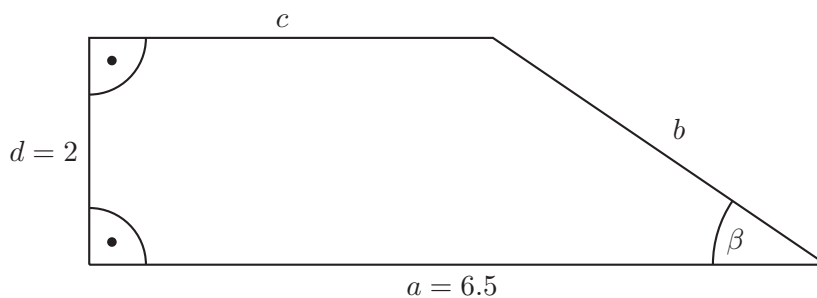


Gegeben ist ein Würfel mit den Ecken A, B, C, D, E, F, G und H . Die Kantenlänge ist a . Der Schnittpunkt der Flächendiagonalen \overline{AH} und \overline{DE} heisst K .

Beweisen Sie, dass \overline{DE} senkrecht auf \overline{BK} steht. (3 P.)

Aufgabe 5.3

- Berechnen Sie die Seitenlängen b und c für $\beta = 52.7^\circ$. (2 P.)
- Für welchen Wert von β sind die Seiten b und c gleich lang? (3 P.)



Viel Erfolg wünschen Ihnen Thomas Blott, Rolf Haag, Roman Huber, Andreas Kilberth, Guido Lafranchi, Matthieu Penserini, Mathias Schenker und Alain Zumbiehl.