

Maturité 2014 – Examen écrit de mathématiques

Classes : 4(A)W, 4GL, 4IM, 4IS, 4LZ, 4Sb, 4SW, 4Wb, 5KSW

Durée de l'examen : 4 heures

Remarque : Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.

Ressources autorisées : Calculatrice TI-Nspire CAS, la calculatrice doit être en mode *Press-to-Test*
Formulaire (*Fundamentum Mathematik und Physik, Orell Füssli Verlag*), sans annotation
Dictionnaire français-allemand

Exercice 1 : Géométrie vectorielle

On considère le point $M(2|5|-1)$ et la droite d :

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Le point $P(x_P|y_P|z_P)$ appartient à la droite d . Calculer x_P et z_P puis montrer que la distance \overline{MP} est égale à 6 unités de longueur. (1,5 P)
- (b) Un autre point Q de la droite d se trouve également à 6 unités de longueur du point M . Calculer les coordonnées du point Q . (1,5 P)

Soit Π_1 le plan qui contient la droite d et le point M .

- (c) Montrer que $x - 2y + 2z + 10 = 0$ est une équation cartésienne du plan Π_1 . (2 P)

Un cône de révolution (ou cône droit = *gerader Kreiskegel*) présente les propriétés suivantes :

- son cercle de base se trouve dans le plan Π_1 : il a pour centre le point M et passe par le point P ;
- la droite passant par le point P et le sommet S du cône a pour équation :

$$PS : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Calculer l'angle α formé par la droite PS et le plan Π_1 . (1,5 P)
- (e) Calculer les coordonnées du sommet S et la hauteur h du cône. (3 P)
- (f) Déterminer une équation d'un plan Π_2 qui coupe le cône en deux solides (*zwei Körper*) de même volume. (2,5 P)

Exercice 2 : Analyse

On considère la famille de fonctions f_k définie par $f_k(x) = k \cdot x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$, où $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, et la droite g d'équation $g(x) = -\frac{1}{2}x$.

- (a) Calculer la valeur du paramètre k pour que le point d'inflexion I du graphe de f_k correspondant se trouve sur l'axe x . (2 P.)

On utilisera la valeur $k = \frac{1}{8}$ pour les questions suivantes. Le graphe de la fonction $f_{\frac{1}{8}}$ est noté K .

- (b) Déterminer les zéros ainsi que les points-maximum et -minimum de K . (2 P.)
- (c) Montrer que g est tangente à K . (2 P.)
- (d) K et g délimitent une surface fermée S_1 . Calculer l'aire de S_1 . (2 P.)
- (e) Le graphe K , la droite g et l'axe x délimitent une surface fermée S_2 . Calculer le volume du solide engendré par la révolution (rotation) de S_2 autour de l'axe x . (2 P.)
- (f) Il existe une autre droite, notée h (différente de g), qui passe par l'origine et qui forme avec K exactement une surface fermée (d'aire finie). Déterminer la pente de h . (2 P.)

Exercice 3 : Analyse

Soient les deux fonctions f et g définies par $f(x) = (1 + 2x)e^{-0,5x}$ et $g(x) = e^{-0,5x}$. Le graphe de f est noté K_f et celui de g est noté K_g .

- (a) Montrer à la main que $f'(x) = (1,5 - x)e^{-0,5x}$ et $f''(x) = (0,5x - 1,75)e^{-0,5x}$ sont deux expressions respectives des dérivées première et seconde de f . (2 P.)
- (b) Calculer les coordonnées du point-maximum et les coordonnées du point d'inflexion de K_f . (2 P.)
- (c) Sous quel angle K_f et K_g se coupent-ils? (2,5 P.)
- (d) La droite d'équation $x = k$, avec $k > 0$, coupe les graphes K_f et K_g aux points respectifs F et G . Déterminer la valeur de k pour que la distance entre les deux points F et G soit maximale. Quelle est alors cette distance maximale? (2 P.)
- (e) K_g délimite avec les axes x et y une surface S qui s'étend à l'infini. Calculer l'aire de S . (1 P.)
- (f) Le point P est l'intersection de K_f avec l'axe y . La tangente t et la droite n normale à K_f en P coupent l'axe x en T et N respectivement. Calculer l'aire du triangle PNT . (2,5 P.)

Exercice 4 : Probabilité

Soient deux urnes A et B . L'urne A contient trois dés équilibrés (*faire Würfel*) et l'urne B contient trois dés truqués (*gefälschte Würfel*).

Pour les dés truqués, la probabilité d'obtenir un 6 est de $\frac{1}{2}$, contre $\frac{1}{10}$ pour chacun des autres nombres.

- (a) On lance les trois dés de l'urne A . Calculer la probabilité que :
- i. Les trois nombres (*Augenzahlen*) 1, 2 et 3 apparaissent ; (2 P.)
 - ii. La somme des nombres (*Augensumme*) soit égale à 16. (2 P.)
- (b) En lançant les trois dés de l'urne B , quelle est la probabilité que la somme des nombres soit égale à 15 ? (3 P.)
- (c) On tire un dé de chacune des deux urnes.
- i. On lance les deux dés. Quelle est la probabilité que le dé de l'urne A montre un nombre plus grand que celui de l'urne B ? (3 P.)
 - ii. Combien de fois faudrait-il lancer les deux dés pour que la probabilité d'obtenir au moins un double-six (*ein Doppelsechser*) soit supérieure à 99,5 % ? (2 P.)

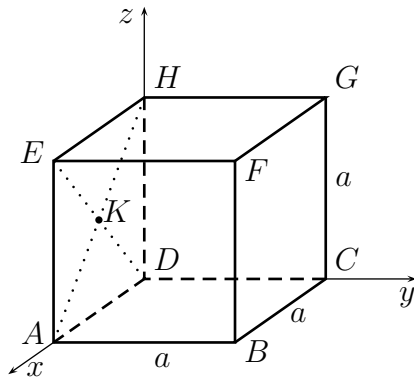
Trois exercices indépendants

Exercice 5.1

La vitesse de travail des ordinateurs de bureau (PC) est déterminée par la fréquence de l'horloge (*Taktrate*). Cette fréquence était de 50 MHz en 1990, puis 1 GHz en 2000 (1 GHz = 1'000 MHz). On considère un modèle où la croissance de cette fréquence avec le temps (les années) est exponentielle. D'après ce modèle :

- (a) Quelle fréquence est attendue pour 2020 ? (2 P.)
- (b) En combien d'années cette fréquence double-t-elle ? (1 P.)
- (c) Quelle est la vitesse de croissance (en GHz/an) de cette fréquence en 2020 ? (1 P.)

Exercice 5.2

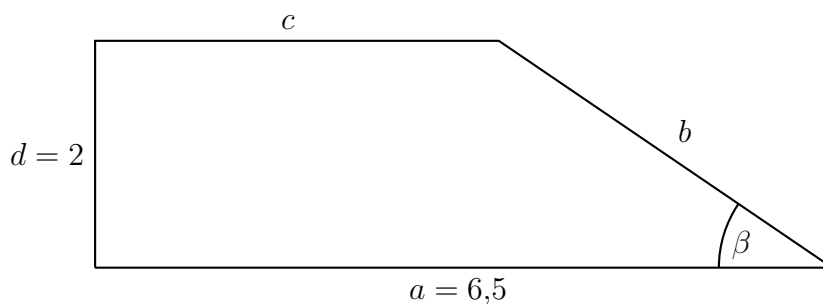


Soit un cube (*Würfel*) $ABCDEFGH$ d'arête a . Les diagonales \overline{AH} et \overline{DE} se coupent au point K .

Montrer que \overline{DE} et \overline{BK} sont perpendiculaires. (3 P.)

Exercice 5.3

- (a) Calculer les longueurs b et c pour $\beta = 52,7^\circ$. (2 P.)
- (b) Pour quel angle β les deux longueurs b et c sont-elles égales ? (3 P.)



Thomas Blott, Rolf Haag, Roman Huber, Andreas Kilberth, Guido Lafranchi, Matthieu Penserini, Mathias Schenker et Alain Zumbiehl vous souhaitent bonne chance.