

Maturité 2010 – Examen écrit de mathématiques

Classes : (4GL), 4I (profil bilingue), (4LW), (4MS), 4Sb, (4W), (4WZ), (5KSW)

Durée de l'examen : 4 h

Ressources autorisées : Calculatrice (dans son état d'origine)

Manuel de la calculatrice (sans annotation)

Formulaire (*Fundamentum* - sans annotation)

Répartition des points :

1	2	3	4a	4b	5	Total
12	12	12	5	7	12	60

Exercice 1 - Analyse

Soit $f_k(x) = \frac{x^4 + k}{x^2}$ l'équation d'une famille de fonctions avec le paramètre réel $k \neq 0$.

- (a) Le graphe de f_k est-il symétrique par rapport à l'un des axes (x ou y) ou par rapport à l'origine (*Ursprung*)? (1 P.)
- (b) Donner les pôles du graphe de f_k . (1 P.)
- (c) Vers quelle fonction se rapproche $f_k(x)$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ (comportement asymptotique)? (1 P.)
- (d) Pour quelles valeurs de k existe-t-il un ou plusieurs zéros de la fonction f_k ? Calculer ces zéros. (1 P.)
- (e) Pour quelles valeurs de k la fonction f_k admet-elle un ou plusieurs extrema? Calculer les points correspondant à ces extrema. La résolution doit être faite à la main pour avoir la totalité des points. (4 P.)
- (f) Calculer k pour que le point $I(3|y_I)$ soit un point d'inflexion de la courbe de f_k . Que vaut y_I ? (2 P.)
- (g) Soient les deux courbes obtenues avec les paramètres $k = -1$ et $k = 1$. Calculer pour $x > 0$ l'aire de la surface délimitée par ces deux courbes entre la position du point-extremum d'une courbe et celle du point d'inflexion de l'autre courbe. (2 P.)

Exercice 2 - Géométrie

Soient les points $A(-2|8|0)$, $B(0|0|-2)$, $C(1|2|0)$ et $D(0|6|1)$.

- (a) Montrer que les 4 points A , B , C et D forment un trapèze isocèle. (2 P.)
- (b) Déterminer une équation cartésienne du plan π ($ABCD$). (1,5 P.)
- (c) Calculer les coordonnées de l'intersection M des diagonales du trapèze $ABCD$. Le calcul doit être fait à la main pour avoir la totalité des points. (2 P.)
- (d) Calculer les angles du trapèze $ABCD$. (1,5 P.)
- (e) Calculer l'aire du trapèze $ABCD$. (2 P.)

Le trapèze isocèle $ABCD$ forme avec le point S une pyramide. Le sommet S est sur la droite d qui est perpendiculaire au plan π et passe par le point $P(0|4|0)$ du plan π . La hauteur de la pyramide est égale à 15 unités de longueur. Le sommet S et l'origine du repère (*Koordinatenursprung*) se situent de part et d'autre du plan π .

(Si l'équation du plan π de la question (b) n'a pas pu être trouvée, utiliser l'équation suivante pour le plan π : $-2x - y + 2z + 4 = 0$.)

- (f) Calculer les coordonnées du sommet S de la pyramide. (3 P.)

Exercice 3 - Probabilité

Pendant la dernière épidémie de grippe porcine (virus H1N1), des chercheurs ont étudié l'efficacité d'un test de dépistage (*Erkennung*) du virus H1N1 sur un échantillon de 100 personnes dont 20 personnes sont effectivement infectées par le virus. Le tableau suivant montre une partie des résultats pour cet échantillon :

	Infectés	Non Infectés	Total
Test Positif	19	A	B
Test Négatif	C	78	D
Total	20	E	100

- (a) Calculer les valeurs manquantes A, B, C, D et E . (1 P.)
- (b) Une personne de l'échantillon est choisie au hasard. Quelle est la probabilité que le test soit positif pour cette personne? (1 P.)
- (c) Quelle est la probabilité que la personne choisie ait un résultat de test positif tout en n'ayant pas le virus? (1 P.)
- (d) Quelle est la probabilité qu'une personne infectée par le virus obtienne un résultat de test négatif? (1 P.)

Sur les 80 personnes saines (non infectées) participant à l'étude, 50 sont des hommes.

- (e) De combien de façons les chercheurs peuvent-ils choisir un groupe de 30 personnes parmi les 80 personnes saines? (1 P.)
- (f) Combien de possibilités ont-ils si exactement la moitié des 30 personnes doivent être des femmes? (1,5 P.)
- (g) Les chercheurs ont ainsi choisi un groupe de 15 hommes et 15 femmes. A partir de ce groupe de 30 personnes, de combien de façons peuvent-ils constituer trois sous-groupes, chacun étant constitué de 5 hommes et 5 femmes, afin de tester trois vaccins (*Impfstoffe*) différents? (2 P.)

Les chercheurs ont estimé que le virus H1N1 est réparti de manière aléatoire dans la population et que 0,01 % de la population est infectée par ce virus.

- (h) Quelle est la probabilité que dans une classe de 24 élèves, exactement 2 élèves soient infectés par le virus? (1,5 P.)
- (i) Combien de personnes au moins faudrait-il choisir dans la population pour que la probabilité d'avoir au moins une personne infectée par le virus soit supérieure à 99 %? (2 P.)

Exercice 4a - Optimisation

Soit un rectangle (*ein Rechteck*) de dimensions notées x et y . Un cylindre est engendré par la révolution (la rotation) de ce rectangle autour d'un côté y .

- (a) Faire un schéma soigné de la situation. (1 P.)
- (b) Le périmètre (*Umfang*) du rectangle est égal à 18 cm. Exprimer le volume $V(x)$ du cylindre en fonction de x . (1 P.)
- (c) Quel doit être alors le domaine de définition de $V(x)$? (1 P.)
- (d) Calculer dans ce cas les dimensions x et y du cylindre de volume maximal. Le calcul doit être fait à la main pour avoir la totalité des points. (2 P.)

(Si aucune équation du volume n'a pu être calculée pour la question (b), utiliser l'expression suivante : $V(x) = \pi \cdot (12x^2 - x^3)$.)

Exercice 4b - Croissance exponentielle

Un adénocarcinome mammaire (*Adenokarzinom der Brust*) est un cancer (*ein Krebs*) à développement rapide. Soit $N(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$ la fonction qui décrit la quantité de cellules cancéreuses (*Krebszellen*) d'une personne où t est le temps en mois. Ces cellules cancéreuses forment en se développant une masse généralement sphérique appelée tumeur (*Tumor*).

- (a) Combien y a-t-il de cellules cancéreuses au temps $t = 0$? (0,5 P.)
- (b) Quel est le temps de doublement de ces cellules cancéreuses? (1 P.)
- (c) Pour pouvoir cliniquement détecter (*feststellen*) une tumeur sphérique, son diamètre (*Durchmesser*) doit mesurer au moins 1 cm, ce qui correspond à environ 10^9 cellules cancéreuses. A partir de quel moment t (en années), le cancer pourra-t-il être détecté? (0,5 P.)
- (d) On détecte réellement chez une personne une tumeur après 7 ans. Quelle est le diamètre approximatif de la tumeur à ce moment là? (1,5 P.)
- (e) Pour la personne de l'exercice (d), le traitement est prévu 1 mois après la découverte de la maladie. Quel est le taux de croissance instantané de la tumeur (en nombre de cellules par mois) au début du traitement? (1 P.)
- (f) Ce traitement a détruit 99,9 % des cellules cancéreuses. Combien de temps dure la rémission clinique (combien de temps avant de pouvoir détecter à nouveau une tumeur)? Ce calcul doit être fait à la main pour avoir la totalité des points. (2,5 P.)

Exercice 5 - Exercices courts

Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

- (a) Trouver l'expression fonctionnelle $f(x)$ de la fonction polynomiale de degré 4 vérifiant les deux conditions suivantes : (4 P.)

- (i) -1 est le minimum global de la fonction f en $x = 2$;
- (ii) $(0|1)$ est un point selle du graphe de f .

- (b) Soient trois droites définies ci-dessous :

(i) $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

(iii) $d_3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Parmi ces trois droites, deux sont non-coplanaires. Calculer à 0,01 près la distance entre ces deux droites. (4 P.)

- (c) Un joueur possède deux dés (*Würfel*). Un dé est équilibré. Le second dé est truqué : le chiffre 6 apparaît avec la probabilité $1/2$ et les autres chiffres apparaissent tous avec la même probabilité.

- (i) Un dé est tiré au hasard et est lancé deux fois de suite. On obtient deux 6. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du dé truqué ? (2 P.)
- (ii) Si le dé est effectivement le dé truqué, quelle est alors la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 en lançant deux fois ce dé ? (2 P.)