

Maturité 2009 – Examen écrit de mathématiques

Classes : (4BM (Profil M)), (4GL), 4IS, (4IZ), (4S), (4W), (4Wa), (4Wb)

Durée de l'examen : 4 h

Ressources autorisées : Calculatrice avec système de calcul formel (CAS) et son manuel
Formulaire (Fundamentum)

Remarques : Commencer chaque exercice sur une nouvelle feuille.
Le travail avec la calculatrice doit être détaillé.
Le nombre maximal de points est indiqué pour chaque exercice.

Analyse (12 points)

1. Soit $f_k(x) = kx^3 - (k+1)x^2$ l'équation d'une famille de courbes avec le paramètre réel et positif k .
 - (a) Calculer **à la main** les zéros de la fonction f_k . (2 P.)
 - (b) Calculer les points-extremum et les points d'inflexion de la fonction f_k . (3 P.)
 - (c) Vers quelles valeurs tendent les zéros et les abscisses x des points-extremum quand k tend vers l'infini? Calculer ces valeurs **à la main**. (2 P.)
 - (d) Calculer k pour que le graphe de f_k et l'axe- x délimitent une surface dont l'aire est égale à $\frac{27}{8}$. (2 P.)
 - (e) Pour quelle valeur de k l'aire de la surface de la question (d) sera-t-elle extrémale? S'agit-il pour cette aire d'un maximum ou d'un minimum? Justifier. (3 P.)

Calcul vectoriel (12 points)

2. Soient la sphère s d'équation $s : x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 20y + 18z - 72 = 0$ et les points $A(0|5|3)$ et $B(-7|8|3)$.
 - (a) Calculer le rayon et les coordonnées du centre de la sphère s . (2 P.)
 - (b) La droite AB coupe s en deux points. Etablir des équations des plans Π_1 et Π_2 tangents à s en ces deux points. (4 P.)
 - (c) Calculer une équation de la droite d intersection des plans Π_1 et Π_2 . (2 P.)
(Si la question (b) n'a pas pu être résolue, utiliser les équations suivantes :
 $\Pi_1 : 9x + 10y + 13z - 140 = 0$ et $\Pi_2 : 3x + 12y + 12z - 68 = 0$.)
 - (d) Soit le plan normal au segment \overline{AB} en son milieu (plan médiateur). La sphère s coupe-t-elle ce plan? La résolution doit être faite **à la main** pour avoir la totalité des points. (4 P.)

Probabilité (12 points)

3. Cet exercice comprend deux parties indépendantes.

Un gymnase compte 180 élèves en classes de 4^e.

(a) Les 180 élèves sont répartis en trois “grandes” spécialités (*Schwerpunkte*) : *langues*, *sciences* et *économie*. 30 % des élèves étudient *l'économie* et 24 d'entre-eux sont des garçons. 42 élèves ont pour spécialité les *sciences* et dans cette spécialité, il y a autant de filles que de garçons. En *langues*, le nombre de filles est égale à 6 fois celui des garçons.

i. Réaliser un tableau qui répartit les élèves (*filles* et *garçons*) entre les trois spécialités (*langues*, *sciences* et *économie*). (1,5 P.)

ii. Dans cette question, les réponses seront données sous la forme d'une fraction irréductible.

Un élève est choisi au hasard parmi les 180 élèves. On considère les événements L , F et E suivants :

- L : « l'élève choisi a pour spécialité une langue »
- F : « l'élève choisi est une fille »
- E : « l'élève choisi étudie l'économie »

A. Calculer les probabilités $P(E)$ et $P(L)$. (1 P.)

B. Définir par une phrase l'événement $E \cap F$ puis calculer $P(E \cap F)$. (1 P.)

C. Calculer $P(F|E)$. Traduire par une phrase le résultat obtenu. (1 P.)

(b) Pour un travail de maturité sur l'agriculture nouvelle, un élève a demandé aux 180 élèves de 4^e année de répondre aux deux questions suivantes :

- « Connaissez-vous le commerce équitable (*fairen Handel*) ? »
- « Pouvez-vous citer un label de l'agriculture biologique ? »

A la première question, $\frac{2}{3}$ des élèves répondent « oui ». Parmi ces élèves, 90 élèves ont cité un label de l'agriculture biologique (par exemple “naturaplan”, “bio engagement” etc.). Parmi ceux qui ne connaissent pas le commerce équitable, 33 élèves ont également cité un label de l'agriculture biologique.

Un élève est interrogé au hasard parmi les 180 élèves. On considère les événements A et C suivants :

- A : « l'élève interrogé a pu citer un label de l'agriculture biologique »
- C : « l'élève interrogé connaît le commerce équitable »

i. Montrer que $P(A|C) = 0,75$. (0,5 P.)

ii. Réaliser un diagramme en arbre en le détaillant complètement. (1,5 P.)

iii. Calculer les probabilités $P(A \cap C)$ et $P(A \cap \overline{C})$. (1 P.)

iv. Un des résultats de l'étude annonce : « 70 % des élèves de 4^e peuvent citer un label de l'agriculture biologique ». Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse. (1 P.)

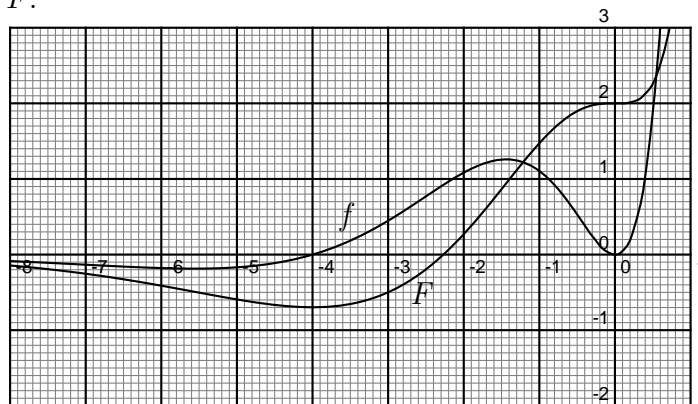
La taille de l'échantillon étant grande ($n = 180$), la probabilité $P(A)$ sera considérée comme constante pour les deux dernières questions.

- v. Si l'on interroge 6 élèves au hasard parmi les 180 élèves, quelle est la probabilité qu'un label de l'agriculture biologique soit cité par 4 personnes exactement ? (Si vous n'avez pas trouvé de réponse à la question précédente, prendre $P(A) = 0,7$.) (1,5 P.)
- vi. Quel doit être le nombre minimum d'élèves à interroger pour que la probabilité qu'au moins un élève ait pu citer un label de l'agriculture biologique soit supérieure à 99,5 % ? (2 P.)

Analyse (12 points)

4. La représentation suivante montre le graphe d'une fonction continue f définie sur \mathbb{R} , ainsi que celui d'une fonction primitive F de f . Les zéros de f sont des valeurs entières (*ganzzahlig*).

- (a) Le graphe de f et l'axe- x délimitent une surface dans le 2^e quadrant. Déterminer à la main, à une décimale près, l'aire de cette surface en utilisant la représentation graphique de F . (2 P.)



- (b) f appartient à la famille de fonctions $f_k(x) = (x^3 + kx^2) \cdot e^x$ avec $k \in \mathbb{R}$. Déterminer k pour que $f_k(x) = f(x)$. (1,5 P.)
- (c) Montrer **à la main** que $F_2(x) = (x^3 - x^2 + 2x - 2) \cdot e^x$ est une fonction primitive de $f_2(x)$. (1 P.)
- (d) Calculer **à la main** l'aire exacte de la surface délimitée par le graphe de f_2 et l'axe- x dans le 2^e quadrant. (1,5 P.)
- (e) Etudier le comportement en $x = 0$ du graphe de f_k en fonction du paramètre k . (Aide : qu'y a-t-il de particulier en $x = 0$ en fonction de k ? distinguer tous les cas possibles, notamment via le calcul différentiel.) (3 P.)
- (f) Déterminer le paramètre $k > 0$ de façon à ce que le graphe de $f_k(x)$ délimite avec l'axe- x deux surfaces d'aires égales. (3 P.)

Exercices courts (12 points)

5. Cette partie est composée de trois exercices indépendants.

- (a) Une population initiale N_0 augmente tout d'abord pendant huit ans avec un taux de croissance annuel de 4,5 %. Ensuite, pour les huit années suivantes, elle augmente avec un taux de croissance annuel de p %. Quelle doit être la valeur de p pour que la population ait doublé en seize ans ? (4 P.)
- (b) Le client d'une imprimerie (*Druckerei*) a besoin de feuilles avec une surface imprimable (*bedruckbarer Fläche*) de 200 cm^2 . Sur chaque feuille, il souhaite laisser une marge (*Rand*) de 2 cm en haut et en bas, et de 1,5 cm à gauche et à droite. Quelles doivent être les dimensions des feuilles pour avoir une consommation de papier la plus petite possible ? (Donner les résultats au mm près.) (4 P.)
- (c) Un parallélépipède rectangle en bois (*Holzquader*) est peint (*gemalt*) en bleu. Ses dimensions sont des valeurs entières (*ganzzalig*) en cm. On découpe ce parallélépipède en cubes de 1 cm de côté. 64 de ces cubes n'ont pas de couleur. Le nombre de cubes avec une seule face bleue est le double du nombre de cubes qui ont exactement deux faces bleues. Quelles sont les dimensions possibles pour ce parallélépipède rectangle ? (4 P.)