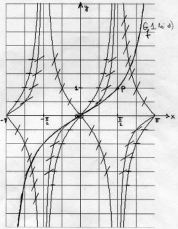
① DGL: $y' \sin x + y \cos x = \sin x$ $\quad (*)$

a) Isoklinenschar: $y' \doteq k$ $\qquad y \cos x = \sin x \, (1-k)$

$\cos x \neq 0$: $\quad \underline{y = (1-k) \tan x}$ $\quad 1$

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{k=0}: & y = \tan x \\ \underline{k=0.5}: & y = \frac{1}{2} \tan x \\ \underline{k=2}: & y = -\tan x \end{array}\right\} 1$$

Graphe 1



d) $\underline{y = f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}}$ $\qquad \left(P(\tfrac{\pi}{2}|1) \rightarrow C = 1\right)$

① $y' \sin x + y \cos x = \sin x$ $(*)$

3 a) s. separates Blatt

b) Homogene DGL: $y' \sin x = - y \cos x$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx \quad 1$$

2 $$\ln|y| = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\underline{\underline{y = \frac{C}{\sin x}}} \quad 1$$

c) $y' \sin x = - y \cos x + \sin x$ $(*)$

Variation der Konstante: $y_0 = \frac{C(x)}{\sin x}$

$$\rightarrow \quad \frac{C'(x)\sin x - C(x)\cos x}{\sin^2 x} \cdot \cancel{\sin x} = - \frac{C(x) \cdot \cos x}{\sin x} + \sin x$$

$$C'(x) = \sin x$$

$$C(x) = -\cos x$$

2 $$\underline{y_0 = - \frac{\cos x}{\sin x}} \quad 1$$

Lösungsgesamtheit: $\underline{\underline{y = \frac{C}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{C - \cos x}{\sin x}}} \quad 1$

d) $P(\frac{\pi}{2}|1) \in G_f$: $1 = \frac{C - 0}{1} \rightarrow \underline{C = 1}$

$$\underline{\underline{y = f(x) = \underbrace{\frac{1 - \cos x}{\sin x}}_{= \tan\frac{x}{2}}}} \quad 1, \quad \text{Graph } G_f\text{: s. 1 separates Blatt}$$

Stetige Fortsetzung bei $x = 0$?

3 De l'Hopital: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = \underline{0} \quad 1$

Es ex. also die stetige Fortsetzung g von f bei 0, nämlich

$$\underline{\underline{g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}}}$$

KSR 04, SF PS/MA

(2) Komplexe Funktion $\quad w = f(z) = \frac{2z - i}{z} = 2 - \frac{i}{z}$

a) Definitionsmenge $\underline{D = \mathbb{C} \setminus \{0\}}$ $\quad \frac{1}{2}$

f^{-1}: $\quad zw = 2z - i$

2 $\quad i = z(2 - w)$

$w \neq 2: \quad z = \frac{i}{2 - w} \quad 1$

Wertemenge $\underline{W = \mathbb{C} \setminus \{2\}}$ $\quad \frac{1}{2}$

b) $k: |z| = 1 \quad , \quad k' = f(k)$?

2 $\quad \left| \frac{i}{2 - w} \right| = \frac{1}{|2 - w|} = 1 \quad 1$

$\rightarrow$ $\underline{k': |w - 2| = 1}$ $\quad 1$ k' ist Kreis mit Mittelpunkt $M(2)$ und Radius 1

c) imag. Achse h': $\quad -w = \overline{w} \quad , \quad h = f^{-1}(h')$?

$-2 + \frac{i}{z} = 2 + \frac{i}{\overline{z}} \quad 1$

2 $\quad i\overline{z} = 4z\overline{z} + iz$

$z\overline{z} + \frac{1}{4}iz - \frac{1}{4}i\overline{z} = 0$

$(z - \frac{1}{4}i)(\overline{z} + \frac{1}{4}i) = \frac{1}{16}$

$h: \quad \underline{|z - \frac{1}{4}i| = \frac{1}{4}}$ $\quad 1$ Kreis mit Mittelpunkt $Z(\frac{1}{4}i)$ und Radius $\frac{1}{4}$

d) $g: (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 0$, d.h. $\underline{g: y = x}$, $g' = f(g)$?

$(1+i)\frac{i}{2-w} + (1-i)\frac{-i}{2-\overline{w}} = 0 \quad 1$

2

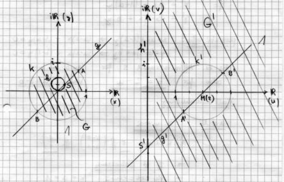
$(i-1)(2-\overline{w}) + (-i-1)(2-w) = 0$

$\underline{g': (1+i)w + (1-i)\overline{w} - 4 = 0}$ $\quad 1$

bzw. $\quad u - v + u - v - 4 = 0$

$\underline{g': \quad v = u - 2}$

Fortsetzung ② d)



KSR 04 | SF PS/MA

(3) a) Gleichung der Kurven, die jede Kurve mit Gl. $x^2 + 4y^2 = a^2$ $(a \in \mathbb{R})$ rechtwinklig schneiden.

Gegebene Kurven sind Ellipsen mit Halbachse a und $\frac{a}{2}$.

In jedem Schnittpunkt $P(x|y)$ der Ellipse und der gesuchten Kurve mit Gl. $y = f(x)$ gilt

$$\underline{y' \cdot y'_{El} = -1} \quad ⊛$$

für y'_{El}:

$$\cancel{2}x + 4 \cdot \cancel{2}y \cdot y'_{El} = 0$$

$$\xrightarrow{(y \neq 0)} \quad y'_{El} = -\frac{x}{4y}$$

$$\xrightarrow[⊛]{(x \neq 0)} \quad \underline{y' = \frac{4y}{x}}$$ DGL für gesuchte Funktion

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \cdot \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y| = 4 \cdot \ln|x| + \ln|C|$$

$$\underline{y = Cx^4}$$

Lösung:

I $\underline{x = 0}$ y-Achse schneidet alle Ellipsen senkrecht

II $\underline{y = 0}$ $(C = 0)$ x-Achse " " " "

III $\underline{y = Cx^4}$ $(C \neq 0)$

KSR 04, SF PS/MA

③ b) Affine Abbildung: (also $\Delta \neq 0$)

$$f: \quad \begin{aligned} x' &= ax + (1-a)y \\ y' &= (a-1)x + b\,y \end{aligned}$$

perspektiv affin? $x = ax + (1-a)y \;\rightarrow\; (a-1)x + (1-a)y = 0$

$y = (a-1)x + by \;\rightarrow\; (a-1)x + (b-1)y = 0$

Es ex. Affinitätsachse s für $1-a = b-1$,

also für $\underline{b = 2-a}$ bzw. $\underline{a = 2-b}$

Fallunterscheidung

$\underline{a \neq 1}$: $\underline{s: y = x}$

Aff.richtung $\underline{r} \parallel \begin{pmatrix} a-1 \\ a-1 \end{pmatrix} \parallel \underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$

→ f ist Scherung

→ Aff. verhältnis $\underline{k = \Delta = 1}$

$\underline{a = 1}$: $x' = x$

$y' = by$ $\qquad \Delta = b \neq 0$ (da affine Abb.)

$\underline{b = 1}$: $f = \mathbb{I}$ (Identität)

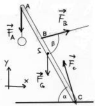
$\underline{b \neq 1}$: $s: y = 0$ (x-Achse)

$r \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ b-1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f ist normale Affinität

Aufg. 4

a)



$\alpha = 62°$
$\beta = 76°$

2

b) $F_A = 196\,N$, $F_G = 491\,N$, $\ell_A = 3\,m$, $\ell_B = 2\,m$

Drehmomente bezüglich C:

$F_A \cdot \ell_A \cdot \sin(90° - \alpha) + F_G \cdot \frac{\ell_A}{2} \cdot \sin(90° - \alpha) = F_B \cdot \ell_B \cdot \sin\beta$

$\left(F_A + \frac{F_G}{2}\right) \cdot \ell_A \cdot \cos\alpha = F_B \cdot \ell_B \sin\beta$

$\Rightarrow F_B = \frac{\left(F_A + \frac{F_G}{2}\right) \ell_A \cos\alpha}{\ell_B \sin\beta} = \underline{\underline{320\,N}}$

2

c) $F_{Bx} = F_B \cdot \cos(\beta - \alpha) = 311\,N$

$\rightarrow |F_{Cx}| = |F_{Bx}| = 311\,N$

$F_{By} = F_B \cdot \sin(\beta - \alpha) = 77{,}5\,N$

$F_{Cy} + F_{By} = F_A + F_G$

$\rightarrow F_{Cy} = F_A + F_G - F_{By} = 610\,N$

$F_C = \sqrt{F_{Cx}^2 + F_{Cy}^2} = \underline{\underline{684\,N}}$

$\tan\gamma = \frac{F_{Cy}}{|F_{Cx}|} = 1{,}96 \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 63{,}0°}}$

4

8P

Aufg. 5

$m = 0{,}5\ kg$

Differentialgleichung: $m\ddot{s} = -k\dot{s} - mg$

mit $v = \dot{s}$: $m\dot{v} = -kv - mg$

Anfangsbedingungen: $s(0) = 0\,m$, $\dot{s}(0) = v(0) = v_0 = 7{,}5\ \frac{m}{s}$

$\dot{v} = -\frac{k}{m}v - g$ mit $\frac{k}{m} = 0{,}8\ s^{-1}$ 1

$\rightarrow$ $\dot{v} = -0{,}8v - 10$ (I) inhomogene DGL.

$\dot{v} = -0{,}8v$ (H) zugehörige homogene DGL

allg. Lsg. von (H): $v = v^* \cdot e^{-0{,}8 \cdot t}$ (v^*: Integr.konst.)

Ansatz part. Lsg. von (I): $v =$ konst., $\dot{v} = 0$

$\rightarrow$ $0 = -0{,}8v - 10 \Rightarrow v = -12{,}5$

allg. Lsg. von (I): $\underline{\underline{v = v^* \cdot e^{-0{,}8t} - 12{,}5}}$ 3

Anfangsbedingung: $v(0) = 7{,}5 = v^* - 12{,}5$

$\Rightarrow v^* = 20$

$\rightarrow$ Lösung: $\underline{\underline{v = 20 \cdot e^{-0{,}8t} - 12{,}5}}$ 1

$s(t) = \int v\,dt = -25 \cdot e^{-0{,}8t} - 12{,}5 \cdot t + s^*$ 1

$s(0) = 0$: $0 = -25 + s^* \Rightarrow s^* = 25$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{s(t) = -25 \cdot e^{-0{,}8 \cdot t} - 12{,}5 \cdot t + 25}}$ 1

$s(1{,}5\,s) = \underline{\underline{-1{,}28\,m}}$ 1

8 P

Aufg. 6

$v = 0{,}7c \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}7^2}} = 1{,}40$ 1

a) x in Lichtsekunden (Ls) $\rightarrow$ $c = 1\,\frac{\text{Ls}}{\text{s}}$, $v = 0{,}7\,\frac{\text{Ls}}{\text{s}}$

S: $\underline{\underline{x_B = 50\,\text{Ls}}}_{(0{,}5)}$, $t_B = \frac{x_B}{v} = \underline{\underline{71{,}4\,\text{s}}}$ (1)

S': $\underline{\underline{x_B' = 0\,\text{Ls}}}_{(0{,}5)}$ $\quad t_B' = \gamma\left(t_B - \frac{v x_B}{c^2}\right) = \underline{\underline{51{,}0\,\text{s}}}$ (1)

$\left(= \frac{t_B}{\gamma}\right)$ 3

b) In S: Lichtblitz wurde 50 s vor Ereignis B ausgelöst, also:

S: $\underline{\underline{x_C = 0\,\text{Ls}}}$, $\quad t_C = \underline{\underline{21{,}4\,\text{s}}}$

S': $x_C' = \gamma(x_C - v t_C) = \underline{\underline{-21{,}0\,\text{Ls}}}$

$t_C' = \gamma\left(t_C - \frac{v x_C}{c^2}\right) = \underline{\underline{30{,}0\,\text{s}}}$ 4

8 P

Aufg. 7

$$f = 600\ Hz \longrightarrow \omega = 2\pi f = 3770\ s^{-1}$$

$$Z_L = i\omega L = i \cdot 37{,}7\ \Omega$$ 1

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -i \cdot 132{,}6\ \Omega$$ 1

$$Z_{R_2L} = R_2 + Z_L = 20\ \Omega + i \cdot 37{,}7\ \Omega$$ 1

$$Z_{CR_2L} = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_{R_2L}}} = 37{,}4\ \Omega + i \cdot 64{,}8\ \Omega \quad (TI-83)$$ 1

$$Z = Z_{R_1CR_2L} = R_1 + Z_{CR_2L} = 67{,}4\ \Omega + i \cdot 64{,}8\ \Omega$$ 1

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{|Z| = 80{,}9\ \Omega}}, \quad \underline{\underline{\varphi = 33{,}6°}}$$ 1

6P

formal: $$Z = R_1 + \frac{i\omega L + R_2}{1 + i\omega C(i\omega L + R_2)}$$