Maturitätsprüfung 2012	Klasse: 4NP
Mathematik	Lehrer: Fi
Teil 1	Dauer: 90 Min.

Die im Unterricht verwendete Formelsammlung ist als einziges Hilfsmittel zugelassen. Alle Lösungen müssen ordentlich und nachvollziehbar dargestellt sein. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1 — 3 Punkte

Bestimme die Koordinaten der Punkte, in denen die Tangenten an den Graphen der Funktion $y = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}^{-0.5x^2+0.5}$ parallel zur x-Achse verlaufen.

Aufgabe 2 — 3 Punkte

Bei einer viergliedrigen geometrischen Folge ist die Summe der ersten beiden Glieder 24, die Summe der beiden letzten Glieder 384. Berechne das erste Glied.

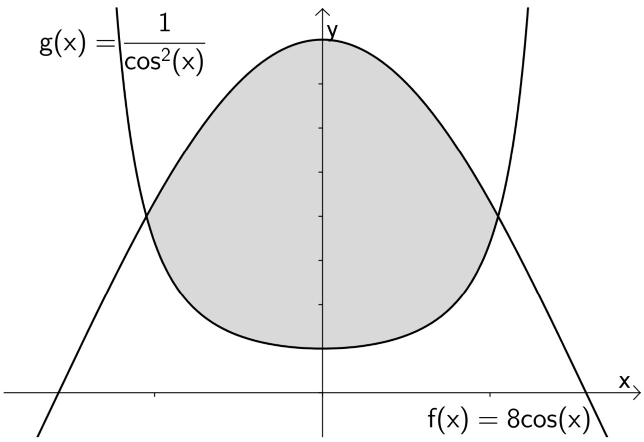
Aufgabe 3 — 4 Punkte

Die drei Ebenen $A: 3x - 3y + z - 9 = 0$, $B: 5x + 2y - 3z - 29 = 0$ und E haben eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimme die Koordinatengleichung der durch den Ursprung gehenden Ebene E.

Aufgabe 4 — 4 Punkte

Gegeben seien die Funktionen
$f(x) = 8 \cdot \cos(x)$ und $g(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$.

a) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte.
b) Berechne den Inhalt der markierten Fläche.

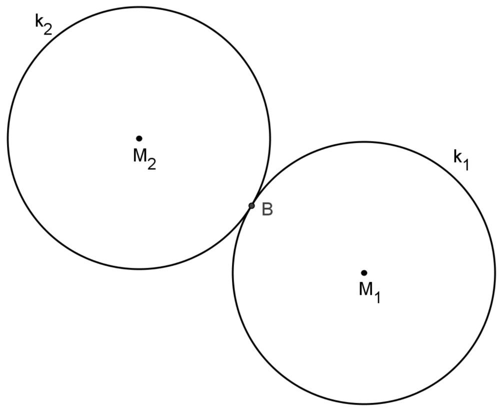


Aufgabe 5

4 Punkte

Die beiden Kreise
k_1: $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$
und k_2 haben gleichen Radius.
Sie berühren sich in einem auf der y-Achse liegenden Punkt B (für B ist der Punkt mit der grösseren y-Koordinate zu nehmen).

Bestimme eine Gleichung von k_2.



Aufgabe 6

6 Punkte

Anna und Bert machen folgendes Spiel: Sie werfen abwechslungsweise einen Spielwürfel. Anna gewinnt, wenn sie eine ungerade Zahl würfelt, Bert wenn er eine gerade Zahl erhält. Das Spiel geht so lange weiter bis einer gewinnt. Anna beginnt.

a) Das Spiel ist nicht sehr fair. Anna hat die grössere Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit?
b) Um das Spiel fair zu machen, beschliessen sie, dass Anna nur gewinnt, wenn sie eine 5 oder eine 6 würfelt. Bert hingegen gewinnt, wenn er eine Zahl, die kleiner ist als k, würfelt. Berechne k.

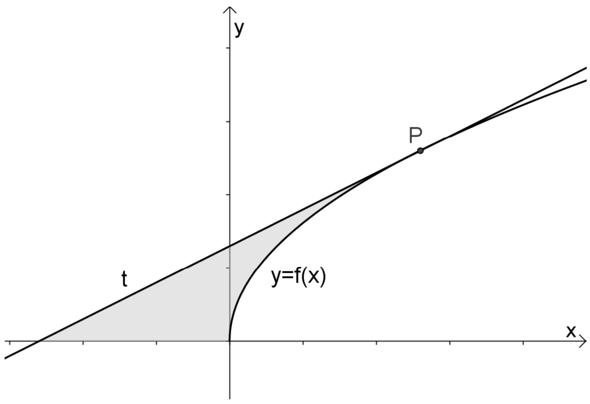
Aufgabe 7

6 Punkte

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{a \cdot x} \quad \text{mit} \quad a > 0.$$

a) An den Graphen von $y = f(x)$ wird im Kurvenpunkt $P(a \,/\, f(a))$ die Tangente t gelegt. Bestimme die Gleichung von t.
b) Das von der Kurve, der Tangente t und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück wird um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.



Aufgabe 8

6 Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(3|-4|7)$, $B(-5|8|3)$ und die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass die Gerade durch A und B und die Gerade g parallel, aber nicht identisch sind.
b) Bestimme auf g die Punkte C und D, sodass $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez ist mit $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$.

Zugelassene Hilfsmittel sind die im Unterricht verwendete Formelsammlung und ein CAS-Taschenrechner. Alle Lösungen müssen ordentlich und nachvollziehbar dargestellt sein. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

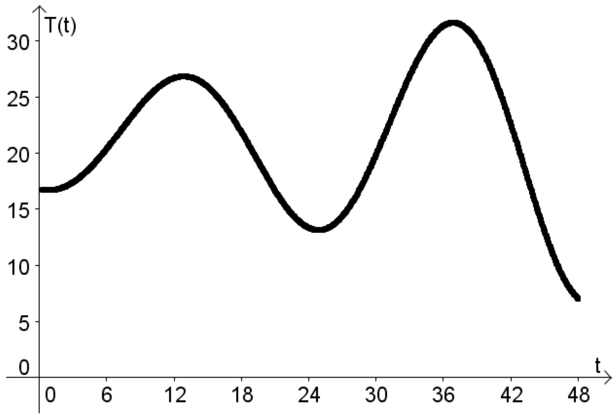
Aufgabe 9 | 3 Punkte

In den Sommerferien wird während zwei Tagen eine Temperaturmessung durchgeführt. Die Messung startet um Mitternacht. Auf Grund des wolkenlosen zweiten Tages nimmt die Temperaturschwankung zu. Der gesamte Temperaturverlauf über die zwei Tage lässt sich mathematisch mit der Funktion $T(t)$ beschreiben:

$$T(t) = 5 \cdot 1.1^{\frac{\pi}{12}(t-6.5)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6.5)\right) + 21$$

t: Zeit in h
$T(t)$: Temperatur in °C

a) Lies aus dem Graphen ab, zu welchem Zeitpunkt die Temperatur am höchsten ist und wann sie am stärksten fällt.
b) Berechne die Durchschnittstemperatur während den zwei Tagen.



Aufgabe 10 | 3 Punkte

Die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ schneidet vom Kreis $k: (x+4)^2 + (y-1)^2 = 100$ ein kleines Segment ab. Berechne die Segmentfläche.

Aufgabe 11 | 3 Punkte

Die Vermehrung von Keimen in Kuhmilch lässt sich durch eine Exponentialfunktion beschreiben. In einem cm^3 Kuhmilch wurden 3 Stunden nach dem Melken 66'000 Keime nachgewiesen, 2 Stunden später 1,1 Millionen.
a) Berechne die Anzahl der Keime 6 Stunden nach dem Melken.
b) In welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl der Keime?

Aufgabe 12 4 Punkte

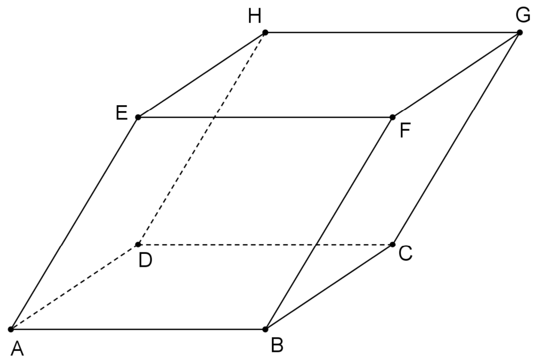
Die Firma Niveau stellt Pflegeprodukte her. Als Kaufanreiz verpackt sie in jede zehnte Packung Hautmilch einen Gutschein für eine Sonnencrème. Die Produkte mit Gutschein werden zufällig unter die anderen gemischt. Andrea kauft monatlich eine Hautmilch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sie

a) im zehnten Monat den ersten Gutschein,
b) spätestens im zehnten Monat den ersten Gutschein,
c) frühestens im zehnten Monat den ersten Gutschein,
d) genau zwei Gutscheine in zehn Monaten?

Aufgabe 13 6 Punkte

$ABCDEFGH$ ist ein schiefes Prisma mit den Ecken $A(0|0|0), B(12|2|0), D(1|8|0)$ und $E(3|3|10)$.

a) Berechne die folgenden Winkel:
   a_1) $\alpha = \sphericalangle(HGF)$
   a_2) β: Neigungswinkel der Kante CG bezüglich der Ebene $ABCD$.
b) Berechne den Abstand des Punktes D von der Ebene $ABFE$.

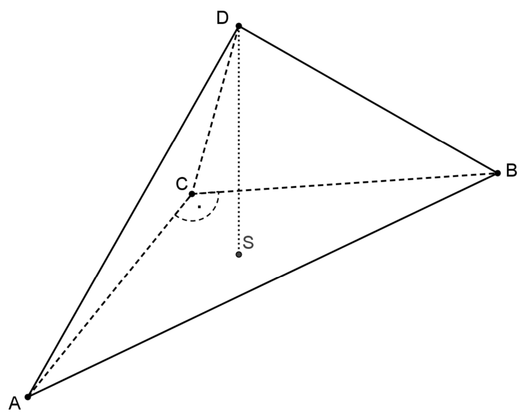


Aufgabe 14 6 Punkte

Die Pyramide $ABCD$ hat das Volumen $V = 12'150$. Die Grundfläche ABC ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Ecke $A(37|20|16)$ und der Spitze $C(0|0|0)$. Die Ecke B liegt in der Ebene $z = 13$.

a) Berechne die Koordinaten von B.
   (Es ist nur die Lösung mit ganzzahligen Koordinaten anzugeben.)

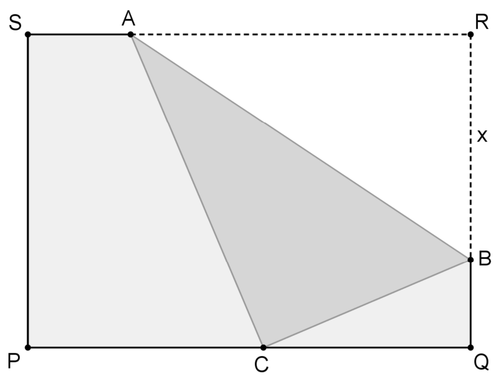
Wer Aufgabe a) nicht lösen konnte, löse die Aufgabe b) mit $B(32|-80|26)$



b) Das Lot von der Spitze D auf die Ebene ABC geht durch den Schwerpunkt S des Dreiecks. Berechne die Koordinaten von D (die Angabe einer Lösung genügt).

Aufgabe 15 5 Punkte

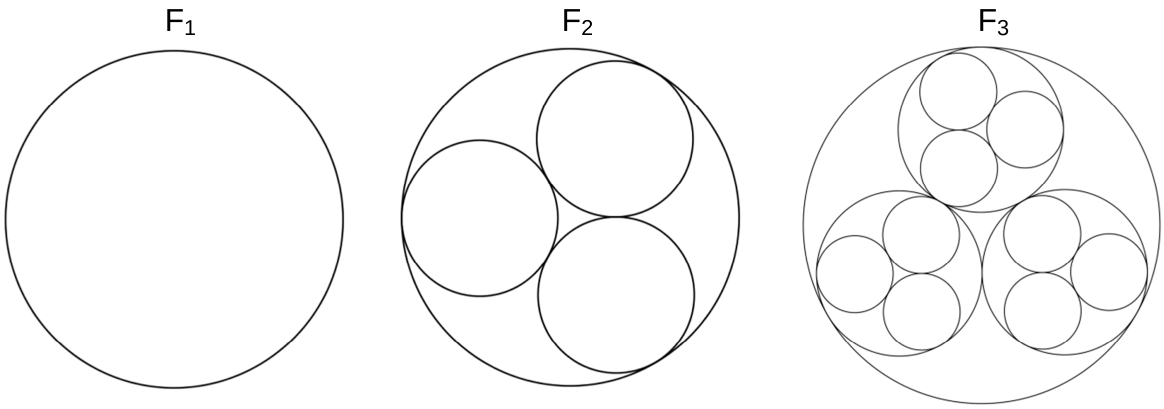
Ein A4-Blatt (297 x 210 mm) wird so gefaltet, dass die rechte obere Ecke auf die untere Kante zu liegen kommt.



a) Zeige, dass die Dreiecke ABR und RCQ ähnlich sind.
b) Bestimme $\overline{AR}$ aus $x = \overline{BR}$.
c) Wie muss gefaltet werden (berechne x), damit die umgefaltete Dreiecksfläche minimal wird?
(Das Minimum muss nicht nachgewiesen werden.)

Aufgabe 16 6 Punkte

In den Einheitskreis werden in einem ersten Schritt drei gleichgrosse Kreise so einbeschrieben, dass sich alle Kreise berühren. In jedem dieser Kreise werden im nächsten Schritt wieder drei Kreise auf dieselbe Art einbeschrieben. Dieser Prozess wird beliebig lange fortgesetzt.



a) Wie viele Kreise sind in der Figur F_{10} vorhanden?

b) Ab welcher Figur hat es mehr als 10‘000‘000‘000 Kreise?

c) Zeige, dass $r_2 = \left(2\sqrt{3} - 3\right) \cdot r_1$ gilt.

Tipp: Betrachte das eingezeichnete gleichseitige Dreieck.

d) Welchem Wert nähert sich die Summe der Kreisflächen bei wachsender Schrittzahl?