



Kantonsschule Heerbrugg

Maturitätsprüfung 2012

Klassen 4GI, 4S, 4Wa, 4L

Mathematik, Teil 1

Lehrkräfte Bs, Fh, Td

Name:

Dauer

90 Minuten

Die im Unterricht verwendete Formelsammlung ist als einziges Hilfsmittel zugelassen. Alle Lösungen müssen ordentlich und nachvollziehbar dargestellt sein. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Bewertung

1	2	3	4	5	6	7	8	Teil 1	Total
3	3	3	4	4	6	6	6	35	70
9	10	11	12	13	14	15	16	Teil 2	Note
4	3	3	5	4	6	4	6	35	

Aufgabe 1

3 Punkte

Löse die Gleichung $\log\left(\frac{1}{3}x\right) + \log(3x+10) = 2\log(x+1)$.



Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 2

3 Punkte

In Wasser beträgt die Ausbreitungsgeschwindigkeit $v(\lambda)$ einer Welle der Wellenlänge λ

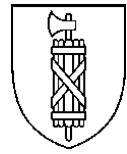
$$v(\lambda) = a \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{b} + \frac{c}{\lambda}} \quad (a, b \text{ und } c \text{ sind bekannte, positive Konstanten}).$$

Bei welcher Wellenlänge wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit minimal? Der Nachweis eines Minimums darf weggelassen werden.

Aufgabe 3

3 Punkte

Bei einer viergliedrigen geometrischen Folge ist die Summe der ersten beiden Glieder 24, die Summe der beiden letzten Glieder 384. Berechne das erste Glied.

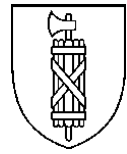


Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 4

4 Punkte

Die drei Ebenen $A: 3x - 3y + z - 9 = 0$, $B: 5x + 2y - 3z - 29 = 0$ und E haben eine gemeinsame Schnittgerade. Bestimme die Koordinatengleichung der durch den Ursprung gehenden Ebene E .



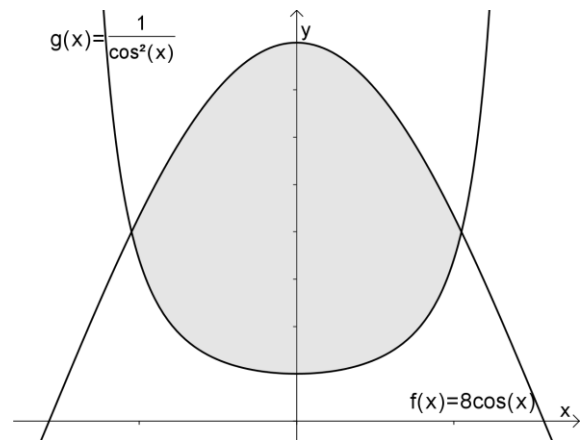
Kantonsschule Heerbrugg

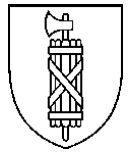
Aufgabe 5

4 Punkte

Gegeben seien die Funktionen
 $f(x) = 8 \cdot \cos(x)$ und $g(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Wie gross ist die markierte Fläche?





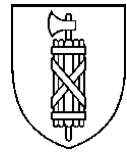
Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 6

6 Punkte

Anna und Bert machen folgendes Spiel: Sie werfen abwechselungsweise einen Würfel. Anna gewinnt, wenn sie eine ungerade Zahl würfelt, Bert wenn er eine gerade Zahl erhält. Das Spiel geht solange weiter bis einer gewinnt. Anna beginnt.

- a) Das Spiel ist nicht sehr fair. Anna hat die grössere Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit?
- b) Um das Spiel fairer zu machen, beschliessen sie, dass Anna nur gewinnt, wenn sie eine 5 oder eine 6 würfelt. Bert hingegen gewinnt, wenn er eine Zahl, die kleiner ist als k würfelt. Berechne k , sodass das Spiel fair ist.



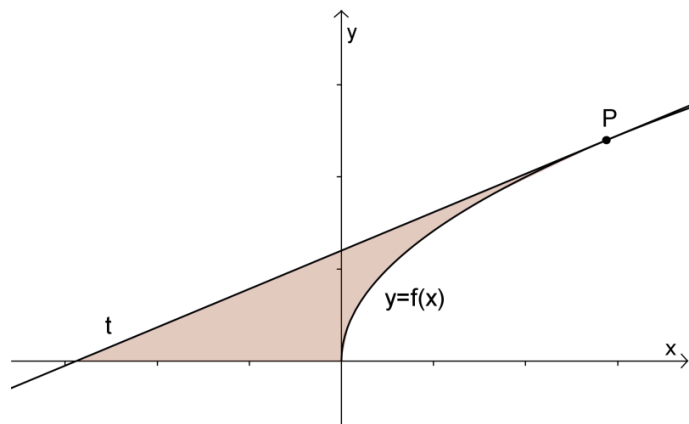
Kantonsschule Heerbrugg

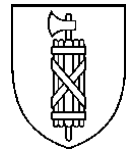
Aufgabe 7

6 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{a \cdot x}$
mit $a > 0$.

- a) An den Graphen von $y = f(x)$ wird
im Kurvenpunkt $P(a|f(a))$ die Tan-
gente t gelegt. Bestimme die Funk-
tionsgleichung von t .
- b) Das von der Kurve, der Tangente t
und der x -Achse eingeschlossene
Flächenstück wird um die x -Achse
rotiert. Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.





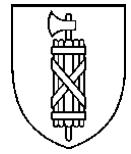
Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 8

6 Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(3|-4|7)$, $B(-5|8|3)$ und die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Zeige, dass die Gerade durch die Punkte A und B parallel, aber nicht identisch zur Geraden g ist.
- Bestimme auf g die Punkte C und D , sodass $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez mit $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$ ist.



Kantonsschule Heerbrugg

Reserveplatz für längere Lösungen

Bitte bei der Aufgabe darauf hinweisen, dass hier die Lösung fortgesetzt wird.



Kantonsschule Heerbrugg

Maturitätsprüfung 2012

Klassen 4GI, 4S, 4Wa, 4L

Mathematik, Teil 2

Lehrkräfte Bs, Fh, Td

Name:

Dauer

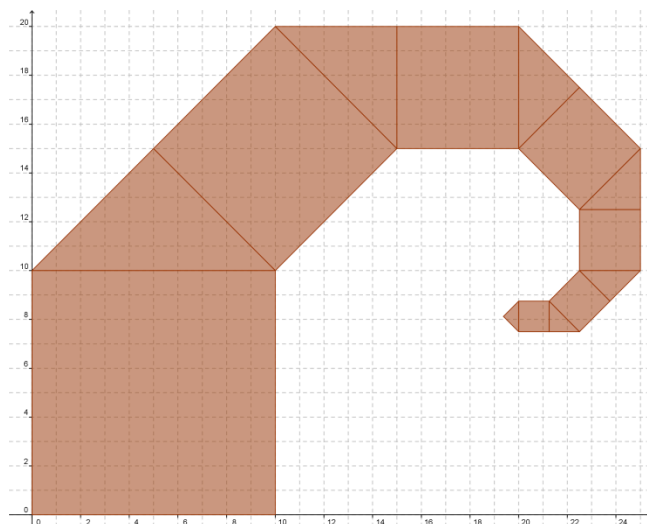
90 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel sind die im Unterricht verwendete Formelsammlung und ein CAS-Taschenrechner. Alle Lösungen müssen ordentlich und nachvollziehbar dargestellt sein. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 9

4 Punkte

Betrachte die Figur bestehend aus unendlich vielen Quadraten und gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken. Das grösste Quadrat hat die Seitenlänge $s_1 = 10$. Berechne die Gesamtfläche.





Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 10

3 Punkte

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \sqrt{0.5x - a}$ und $g(x) = e^{0.5x}$.

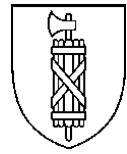
Bestimme den Parameter a , sodass sich die Graphen der beiden Funktionen berühren.

Aufgabe 11

3 Punkte

Die Vermehrung von Keimen in Kuhmilch lässt sich durch eine Exponentialfunktion beschreiben. In 1 cm^3 Kuhmilch wurden 3 Stunden nach dem Melken 66'000 Keime nachgewiesen, 2 Stunden später 1.1 Millionen.

- Berechne die Anzahl der Keime 6 Stunden nach dem Melken.
- In welcher Zeit verdoppelt sich die Anzahl der Keime?



Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 12

5 Punkte

Betrachte die Parabel $y = 1 - x^2$. Im ersten Quadranten wird ein Punkt P auf der Parabel gewählt. Die Parabeltangente t in P bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimme die Koordinaten von P , sodass der Flächeninhalt des Dreiecks minimal wird.



Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 13

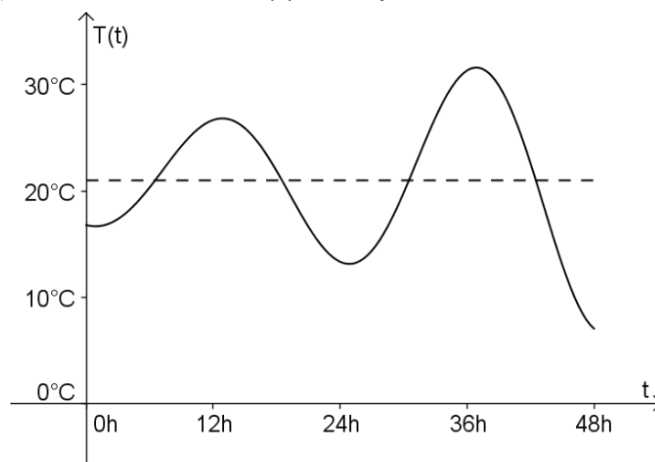
4 Punkte

In den Sommerferien wird während zwei Tagen eine Temperaturmessung durchgeführt. Die Messung startet um Mitternacht. Auf Grund des wolkenlosen zweiten Tages nimmt die Temperaturschwankung zu. Der gesamte Temperaturverlauf über die zwei Tage lässt sich mathematisch mit der Funktion $T(t)$ beschreiben:

$$T(t) = 5 \cdot 1.1^{12(t-6.5)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}(t-6.5)\right) + 21$$

t : Zeit in h
 $T(t)$: Temperatur in °C

- Zu welchem Zeitpunkt wird die grösste Temperatur gemessen?
- Zu welchem Zeitpunkt fällt die Temperatur am stärksten?
- Welche Durchschnittstemperatur herrscht während den zwei Tagen?





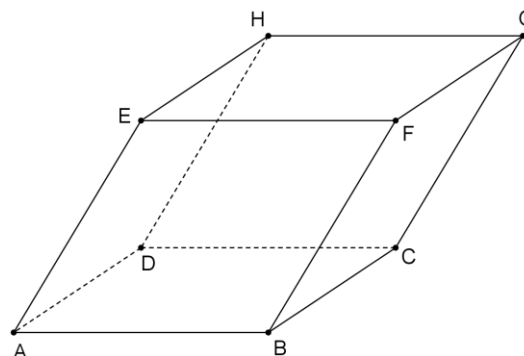
Kantonsschule Heerbrugg

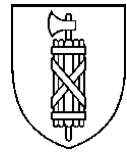
Aufgabe 14

6 Punkte

$ABCDEFGH$ ist ein schiefes Prisma mit den Ecken $A(0|0|0)$, $B(12|2|0)$, $D(1|8|0)$ und $E(3|3|10)$.

- Berechne den Winkel $\alpha = \sphericalangle(HGF)$.
- Berechne den Neigungswinkel β der Kante CG bezüglich der Ebene $ABCD$.
- Berechne den Abstand des Punktes H von der Ebene $ABFE$.





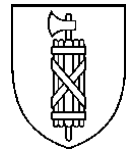
Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 15

4 Punkte

Die Firma Nivea stellt Pflegeprodukte her. Als Kaufanreiz verpackt sie in jede zehnte Packung Hautmilch einen Gutschein für eine Sonnencreme. Die Produkte mit Gutschein werden zufällig unter die anderen gemischt. Andrea kauft monatlich eine Hautmilch. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet sie

- a) im zehnten Monat den ersten Gutschein,
- b) spätestens im zehnten Monat den ersten Gutschein,
- c) frühestens im zehnten Monat den ersten Gutschein,
- d) genau zwei Gutscheine in zehn Monaten?



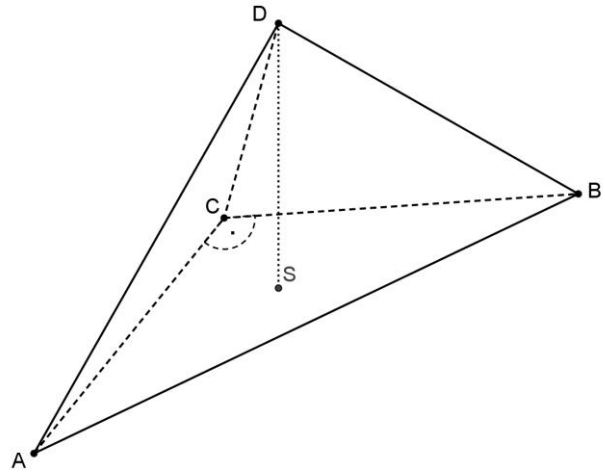
Kantonsschule Heerbrugg

Aufgabe 16

6 Punkte

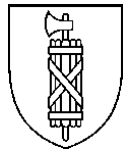
Die Pyramide $ABCD$ hat das Volumen $V = 12'150$. Die Grundfläche ABC ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck mit der Ecke $A(37|20|16)$ und der Spitze $C(0|0|0)$. Die Ecke B liegt in der Ebene $z = 13$.

- a) Berechne die Koordinaten von B .
(Es ist nur die Lösung mit ganzzahligen Koordinaten anzugeben.)



Wer Aufgabe a) nicht lösen konnte, löse die Aufgabe b) mit $B(32|-80|26)$. Das entstehende Ersatzdreieck ABC bleibt rechtwinklig.

- b) Das Lot von der Spitze D auf die Ebene ABC geht durch den Schwerpunkt S des Dreiecks. Berechne die Koordinaten von D (die Angabe einer Lösung genügt).



Kantonsschule Heerbrugg

Reserveplatz für längere Lösungen

Bitte bei der Aufgabe darauf hinweisen, dass hier die Lösung fortgesetzt wird.