	Maturitätsprüfung 2008 **Mathematik** **Teil 1**	Klassen: 4GSb, 4Wb Lehrer: Td Dauer: 90 Min.

Die Formelsammlung der Neuen Kantonsschule Aarau ist als einziges Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1 — 2 Punkte

Bestimme die erste Ableitung (ohne weiteres Vereinfachen).

$$f(x) = \ln\left(x^2 + \sin(2x)\right) + \frac{\sqrt{3x^3 - \frac{1}{x}}}{\tan(x)}$$

Aufgabe 2 — 2 Punkte

Welche Lage hat die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Ebene $\varepsilon: 2x + 3y - z + 1 = 0$?

Aufgabe 3 — 2 Punkte

Eine Tangente der Kurve $f: y = e^x$ geht durch den Punkt $P(1/0)$. Berechne die Koordinaten des Berührungspunktes.

Aufgabe 4 — 2 Punkte

Die Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 + 8x + 1$ wird um den Vektor $\vec{v}$ verschoben. Die Gleichung der Bildparabel lautet $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x - 8$. Bestimme die Komponenten von $\vec{v}$.

Aufgabe 5 — 2 Punkte

Zeige: Das Quadrat mit den Ecken A(0/0), B(1/0), C(1/1) und D(0/1) wird durch die Graphen der Funktionen $y = x$, $y = x^3$ und $y = \sqrt[3]{x}$ in vier gleiche Teile geteilt.

Aufgabe 6 — 3 Punkte

Bestimme auf der Normalen durch $P(-5/1/1{,}5)$ zur Ebene $\alpha: 12x + 2y + 5z = 0$ <u>einen</u> Punkt, der von den Ebenen $\beta: x - 2y + 2z + 4 = 0$ und $\gamma: 2x + 3y - 6z - 5 = 0$ gleiche Abstände hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 | 3 Punkte

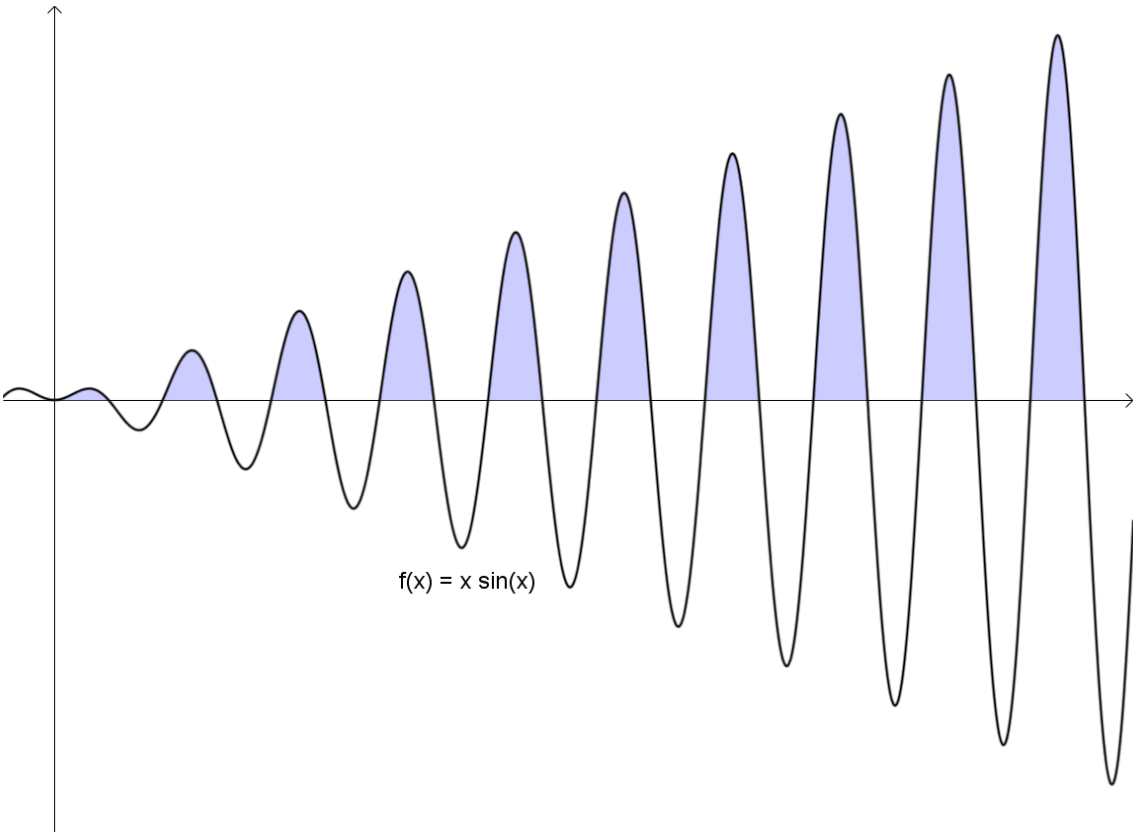
Bei der Deutschen Post galt früher die folgende Vorschrift: „Bei Auslandspäckchen in Rollenform dürfen Grundkreisdurchmesser und Länge zusammen höchstens 100 cm betragen.“
Wie sind bei dieser Vorschrift der Radius des Grundkreises und die Länge der Rolle zu wählen, damit das Volumen möglichst gross wird?

Aufgabe 8 | 4 Punkte

a) Zeige: $\int x \cdot \sin(x)\,dx = \sin(x) - x \cdot \cos(x) + c$

b) Betrachte die Folge der Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, … der Flächen, welche im ersten Quadranten zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$ liegen.
Bilden diese Flächeninhalte eine geometrische oder eine arithmetische Folge?

c) Berechne die Summe der ersten 20 Flächeninhalte.



Aufgabe 9 | 4 Punkte

Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man die Ecke $A(6/12/4)$. Die Ecken B und C liegen auf der Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von B und C.

Maturitätsprüfung 2008
Mathematik
Teil 2

Klassen: 4GSb, 4Wb
Lehrer: Td
Dauer: 90 Min.

Zugelassen sind die Formelsammlung der Neuen Kantonsschule Aarau und der Taschenrechner TI-89. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1

3 Punkte

Ein Kreis k_1: $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ sowie das Zentrum $M_2(-7/-18)$ eines Kreises k_2 sind gegeben. Bestimme den Radius r_2 des Kreises k_2 so, dass sich die beiden Kreise berühren. (Gib beiden Lösungen an.)

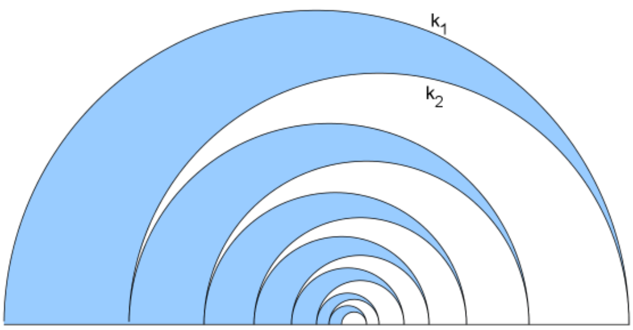
Aufgabe 2

3 Punkte

Die Radien der Halbkreise $k_1, k_2, \ldots\ldots$ bilden eine geometrische Folge mit $r_1 = 5, r_2 = 4$.

a) Berechne die Summe der Bogenlängen der ersten 20 Halbkreise.

b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der unendlich vielen markierten Flächen.



Aufgabe 3

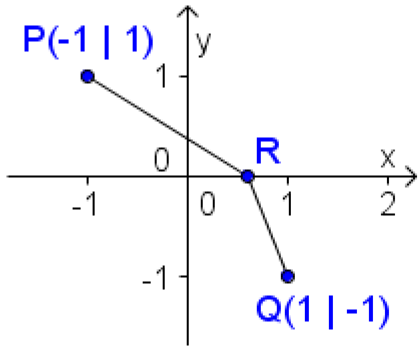
3 Punkte

Lichtstrahlen werden beim Übergang von einem Medium (Beispiel: Luft) in ein anderes Medium (Beispiel: Wasser) gebrochen. Zur Erklärung des Phänomens der Lichtbrechung genügen einfache geometrische Beziehungen und das Extremalprinzip der Natur: Ein Lichtstrahl wählt seinen Weg immer so, dass er den Weg in <u>minimaler Zeit</u> zurücklegen kann.

In nebenstehender Skizze legt ein Lichtstrahl den Weg vom Punkt $P(-1/1)$ zum Punkt $Q(1/-1)$ zurück. Unterwegs wird er an der x-Achse gebrochen.

Oberhalb der x-Achse beträgt die Geschwindigkeit des Lichtstrahls $v_1 = 5$, unterhalb der x-Achse $v_2 = 2$.

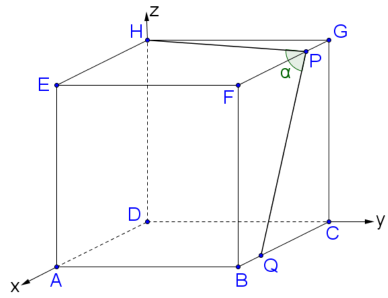
Berechne die x-Koordinate des Punktes R.
(Das Minimum muss nicht nachgewiesen werden.)



Bitte wenden!

Aufgabe 4 | 2 Punkte

Im Würfel ABCDEFGH teilt P die Kante $\overline{FG}$ im Verhältnis 3:1 und Q teilt die Kante $\overline{BC}$ im Verhältnis 1:3 (siehe Figur).
Berechne den Winkel α.



Aufgabe 5 | 3 Punkte

Hugo möchte sich einen Porsche Boxster kaufen. Allerdings hat er das Geld nicht flüssig. Er nimmt deshalb einen Kredit von Fr. 90'000.-- auf. Die Moneygiver-Bank macht für ihn als gutem Kunden eine Ausnahme und anstelle der üblichen Monatsraten kann Hugo jährliche Raten mit einem Zinsfuss von 8% zahlen.
Am 1. Januar kriegt er den Kredit und kauft sich den Porsche. Am 31. Dezember desselben Jahres ist die erste von 10 gleichbleibenden, jährlichen Raten fällig.

a) Wie gross sind die jährlichen Raten R, die Hugo jeweils am 31. Dezember zahlen muss? (Resultat auf 5 Rappen runden.)

Viereinhalb Jahre nach dem Kauf des Porsches fährt Hugo diesen zu Schrott. Gemäss Vertrag mit der Moneygiver-Bank ist er deshalb verpflichtet, die Restschuld in einer einzigen Zahlung am Ende des Unfalljahres zu bezahlen.

b) Wie gross ist diese Zahlung? (Wer (a) nicht lösen konnte, nehme R = 12'000.--)

Aufgabe 6 | 4 Punkte

Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 3$. Wird die im ersten Quadranten zwischen der Kurve und der x-Achse liegende Fläche um die x-Achse rotiert, so hat der entstehende Rotationskörper das Volumen $V = 25'515\pi$. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel 3. Ordnung.

Aufgabe 7 | 4 Punkte

Ende 2005 betrugen die nachgewiesenen Erölreserven 163,7 Milliarden Tonnen. Im Jahr 2005 betrug der Verbrauch 3836,8 Millionen Tonnen.

a) Für wie viele Jahre reicht der nachgewiesene Vorrat, wenn der Verbrauch konstant bleibt?
b) In welchem Jahr würden die nachgewiesenen Vorräte ausgehen, wenn der Verbrauch jedes Jahr um 1% zunimmt?
c) Um wie viele Prozente müsste der Verbrauch jedes Jahr gesenkt werden, damit die nachgewiesenen Reserven ewig reichen?

Aufgabe 8 | 4 Punkte

Betrachte die Fläche F_1 des Dreiecks *ABC* sowie die Fläche F_2 zwischen der Parabel $p: y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ und der Geraden $g: y = a$.

Zeige: Das Verhältnis $F_1 : F_2$ beträgt 3:4.