Maturitätsprüfung 2008
Mathematik
Teil 1

Klasse: 4NaPa
Lehrer: Fi
Dauer: 90 Min.

Die Formelsammlung der DMK/DPK, Verlag Orell Füssli, ist als einziges Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1 — 2 Punkte

Die Parabel $y = 0{,}5x^2 + 8x + 1$ wird um den Vektor $\vec{v}$ verschoben. Die Gleichung der Bildparabel lautet $y = 0{,}5x^2 - 4x - 8$. Bestimme die Komponenten von $\vec{v}$.

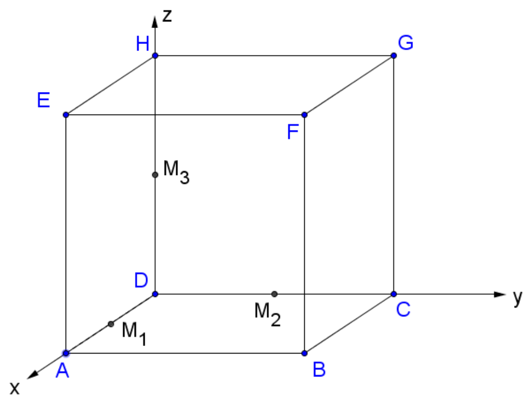
Aufgabe 2 — 3 Punkte

Der Würfel ABCDEFGH hat die Kantenlänge s=12. M_1, M_2 und M_3 sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{DA}$, $\overline{DC}$ und $\overline{DH}$.

a) Bestimme die Koordinatengleichungen der Ebenen DCFE, DAFG und $M_1M_2M_3$.

b) Berechne die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der drei Ebenen.

c) Die Inkugel des Würfels schneidet eine Parallelebene zur Ebene $M_1M_2M_3$ in einem Kreis mit Radius $r = 3$. Bestimme eine Gleichung der Parallelebene.



Aufgabe 3 — 3 Punkte

Bei der Deutschen Post galt früher die folgende Vorschrift: „Bei Auslandspäckchen in Rollenform dürfen Grundkreisdurchmesser und Länge zusammen höchstens 100 cm betragen."
Wie sind bei dieser Vorschrift der Radius des Grundkreises und die Länge der Rolle zu wählen, damit das Volumen möglichst gross wird?

Aufgabe 4 — 4 Punkte

a) Es sei $f(x) = x \cdot e^x$. Stelle eine Formel auf für die n-te Ableitung $f^{(n)}(x)$ und beweise diese.

b) $f^{(k)}(x)$ ist die k-te Ableitung der Funktion $f(x) = x \cdot e^x$ und $I_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 f^{(k)}(x)\,dx\right)$.

Berechne I_1, I_2, I_3, I_4 und stelle anschliessend eine Vermutung auf für eine explizite Formel für I_n (ohne Beweis).

Bitte wenden!

Aufgabe 5 | 2 Punkte

Für welche Werte von c haben die Kurven $y = \ln(x)$ und $y = c \cdot x^2$ genau einen Punkt gemeinsam?

Aufgabe 6 | 4 Punkte

Von einem gleichseitigen Dreieck ABC kennt man die Ecke $A(6/12/4)$. Die Ecken B und C liegen auf der Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten von B und C.

Aufgabe 7 | 5 Punkte

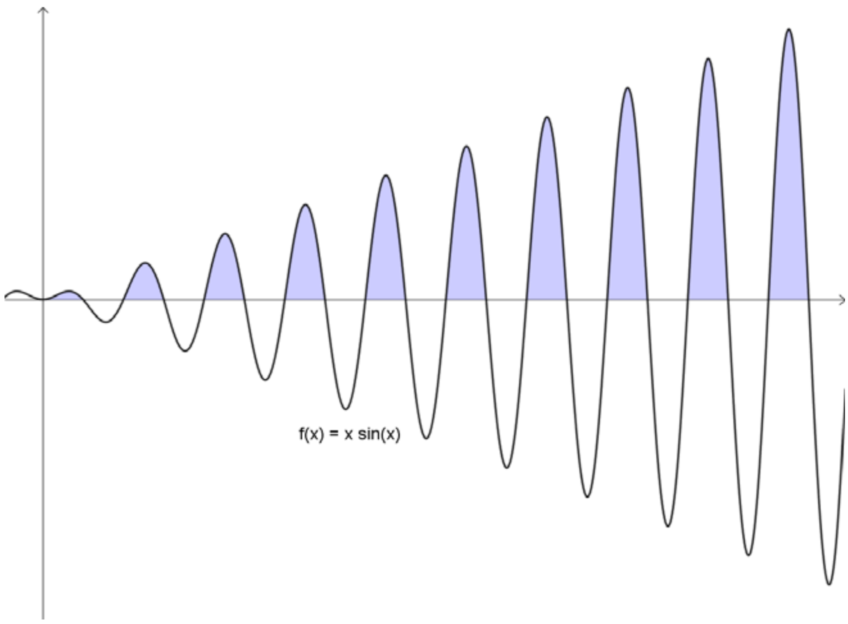
a) Bestimme von der Funktion $y = \dfrac{1 - \sqrt{2}\cos(x)}{\sqrt{3} + 2\cos(x)}$ im Intervall $[0,2\pi[$ liegende Nullstellen und Pole.

b) Zeige, dass die Funktion keine Wendepunkte hat.

Aufgabe 8 | 4 Punkte

a) Betrachte die Folge der Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, …, welche im ersten Quadranten zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$ liegen. Berechne F_1, F_2 und F_3. Bilden diese Flächeninhalte eine geometrische oder eine arithmetische Folge?

b) Berechne die Summe der ersten 20 Flächeninhalte.



Maturitätsprüfung 2008
Mathematik
Teil 2

Klasse: 4NaPa
Lehrer: Fi
Dauer: 90 Min.

Zugelassen sind die Formelsammlung der DMK/DPK, Verlag Orell Füssli und der TR Voyage™ 200 (ohne eigene Programme). Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1 — 2 Punkte

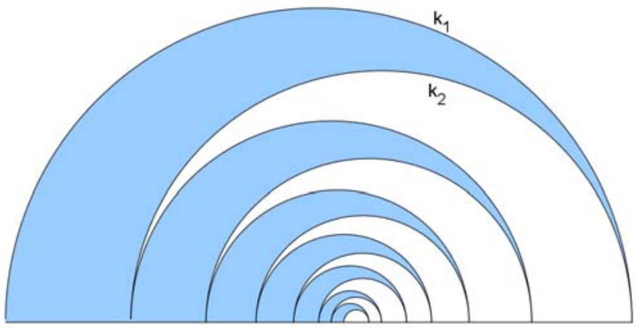
Periselen und Aposelen bezeichnen den mondnächsten bzw. den mondfernsten Punkt in der Bahn eines den Mond umkreisenden Körpers. Das Apollo 11 – Raumschiff wurde auf eine elliptische Mondumlaufbahn mit der Periselen-Höhe 110 km und der Aposelenhöhe 314 km (über der Mondoberfläche) gesetzt.
Bestimme die Gleichung der Ellipse, wenn der Mondradius 1738 km beträgt und das Mondzentrum in einem Brennpunkt der Umlaufbahn liegt.

Aufgabe 2 — 3 Punkte

Die Radien der Halbkreise $k_1, k_2, ...$ bilden eine geometrische Folge mit $r_1 = 5, r_2 = 4$.

a) Berechne die Summe der Bogenlängen der ersten 20 Halbkreise.

b) Berechne die Summe der Flächeninhalte der unendlich vielen markierten Flächen.



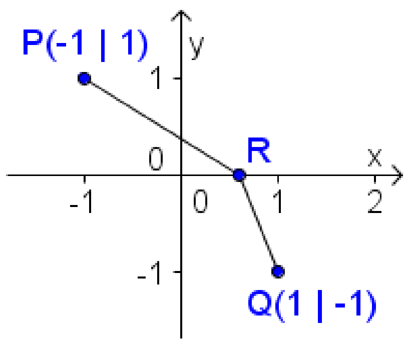
Aufgabe 3 — 3 Punkte

Lichtstrahlen werden beim Übergang von einem Medium (Beispiel: Luft) in ein anderes Medium (Beispiel: Wasser) gebrochen. Zur Erklärung des Phänomens der Lichtbrechung genügen einfache geometrische Beziehungen und das Extremalprinzip der Natur: Ein Lichtstrahl wählt seinen Weg immer so, dass er den Weg in <u>minimaler Zeit</u> zurücklegen kann.

In nebenstehender Skizze legt ein Lichtstrahl den Weg vom Punkt $P(-1/1)$ zum Punkt $Q(1/-1)$ zurück. Unterwegs wird er an der x-Achse gebrochen.

Oberhalb der x-Achse beträgt die Geschwindigkeit des Lichtstrahls $v_1 = 5$, unterhalb der x-Achse $v_2 = 2$.

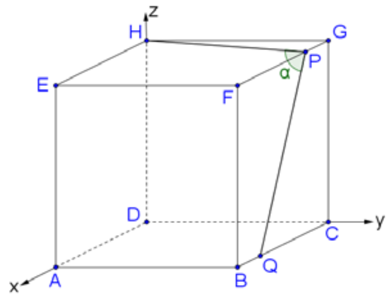
Berechne die x-Koordinate des Punktes R.
(Das Minimum muss nicht nachgewiesen werden.)



Bitte wenden!

Aufgabe 4 — 2 Punkte

Im Würfel ABCDEFGH teilt P die Kante $\overline{FG}$ im Verhältnis 3:1 und Q teilt die Kante $\overline{BC}$ im Verhältnis 1:3. Berechne den Winkel α.



Aufgabe 5 — 4 Punkte

Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung und schneidet die x-Achse an der Stelle $x = 3$. Wird die im ersten Quadranten zwischen der Kurve und der x-Achse liegende Fläche um die x-Achse rotiert, so hat der entstehende Rotationskörper das Volumen $V = 25'515\pi$. Bestimme die Funktionsgleichung der Parabel 3. Ordnung.

Aufgabe 6 — 2 Punkte

Alle Hoch- und Tiefpunkte des Graphen der Funktion $y = 2\cos(x) - x$ haben von der Geraden $y = -x$ denselben Abstand d. Berechne d.

Aufgabe 7 — 3 Punkte

C ist der oberste Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Der Punkt A sei ein Punkt der Ellipse, B sein Spiegelbild bezüglich der y-Achse. Bestimme die Koordinaten von A, sodass das Dreieck ABC maximalen Flächeninhalt hat. Begründe mittels geometrischer Überlegungen, dass es sich beim Extremum um ein Maximum handelt.

Aufgabe 8 — 4 Punkte

Ende 2005 betrugen die nachgewiesenen Erdölreserven 163,7 Milliarden Tonnen. Im Jahr 2005 betrug der Verbrauch 3836,8 Millionen Tonnen.

a) Für wie viele Jahre reicht der nachgewiesene Vorrat, wenn der Verbrauch konstant bleibt?
b) In welchem Jahr würden die nachgewiesenen Vorräte ausgehen, wenn der Verbrauch jedes Jahr um 1% zunimmt?
c) Um wie viele Prozente müsste der Verbrauch jedes Jahr gesenkt werden, damit die nachgewiesenen Reserven ewig reichen?

Aufgabe 9 — 3 Punkte

Die nebenstehende Figur zeigt eine horizontale Gerade $y = c$, die die Kurve $y = -x^2 + 2x$ schneidet.

a) Berechne den Inhalt der beiden markierten Flächen in Abhängigkeit von c.
b) Berechne c, sodass die markierten Flächen gleichen Inhalt haben.