Maturitätsprüfung 2006 | Klasse: MNPb
Mathematik | Lehrer: Sp
Teil 1 | Dauer: 90 Min.

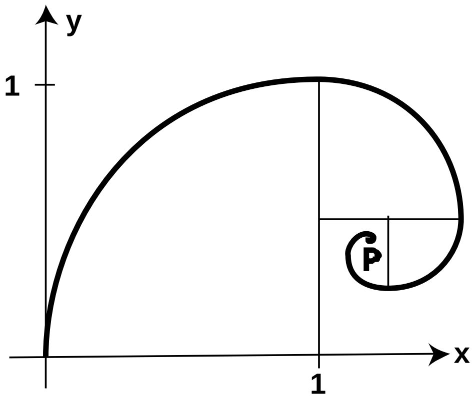
Die Formelsammlung ist als einziges Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1 — 3 Punkte

Die gezeichnete Spirale besteht aus (unendlich vielen) Viertelkreisen. Der Radius ist jeweils halb so gross ist wie der vorherige.

a) Wie lang ist die Spirale?

b) Bestimme die x-Koordinate des Punktes P, gegen den die Spirale konvergiert.



Aufgabe 2 — 6 Punkte

Gegeben: Kreis $x^2 + y^2 - 4x - 20y + 103 = 0$

Gesucht: Mittelpunkte aller Kreise mit Radius 14, welche den gegebenen Kreis und die y-Achse berühren.

Aufgabe 3 — 5 Punkte

Bestimme die Gleichungen $ax + by + c = 0$ der gemeinsamen inneren Tangenten an die Kreise k_1 um $M_1(0/0)$ mit Radius $r_1 = 1$ und k_2 um $M_2(2/-4)$ mit Radius $r_2 = 3$.

Aufgabe 4 — 8 Punkte

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.

b) Untersuche den Kegelschnitt (Art, Neigungswinkel der Hauptachse und Halbachsen) $17x^2 - 16xy + 17y^2 - 225 = 0$.

c) Löse das folgende System zweier Differentialgleichungen, welches zwei gekoppelte Oszillatoren beschreibt:

$$\ddot{x}_1 = -17x_1 + 8x_2$$
$$\ddot{x}_2 = 8x_1 - 17x_2$$

Aufgabe 5 — 5 Punkte

Berechne die Länge der Kurve $y = 2 \cdot e^{x/2}$ von $x = \ln 3$ bis $x = \ln 8$.

Hinweis: Substituiere die Wurzel

Aufgabe 6 — 6 Punkte

Gegeben: $y = \left(\frac{3}{4}\sin(x)\right)^{\frac{4}{3}}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

In welchem Punkt P der Kurve muss man die Normale ziehen, damit die Fläche des Dreiecks gebildet aus der Normalen durch P, der Vertikalen durch P und der x-Achse extremal wird.

Maturitätsprüfung 2006
Mathematik
Teil 2

Klasse: MNPb
Lehrer: Sp
Dauer: 120 Min.

Zugelassen sind die Formelsammlung und der Taschenrechner Voyage 200 oder TI-89. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

Aufgabe 1 — 7 Punkte

a) A legt Fr. 50'000 an. Wie gross ist das Kapital von A nach 8 Jahren? Zinsfuss p = 1.5 %.
b) B erwirbt für Fr. 50'000 eine so genannte Kassenobligation mit einer Laufzeit von 8 Jahren, d.h. B leiht der Bank Fr. 50'000 für 8 Jahre. Dafür erhält B achtmal jeweils nach einem Jahr Fr. 1'250, die von der Bank verzinst werden. Zinsfuss p = 1.5 %. Nach 8 Jahren bekommt B die Fr. 50'000 zurück. Wie gross ist das Kapital von B nach 8 Jahren?
c) Die Rendite der Obligation ist der Zinsfuss p in a) und b), für den das Kapital von A und B nach 8 Jahren gleich gross wäre. Berechne die Rendite, wenn möglich ohne Rechner.

Aufgabe 2 — 13 Punkte

Gegeben: Geraden $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 13 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. Punkt C(8/9/6)

a) Bestimme A und B auf g so, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.
b) Bestimme D auf h so, dass die Pyramide ABCD das Volumen 40.5 hat.
c) Bestimme E so, dass die Pyramide ABCE gleichlange Kanten hat (d.h. $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE}$) und die Höhe durch E die Länge $3 \cdot \sqrt{3}$ hat.

Hinweis: Falls du a) nicht lösen kannst, nehme in b) und c) für das gleichseitige Dreieck A(9/7/-1) B(6/-5/2) C(6/4/11).

Aufgabe 3 — 10 Punkte

Gegeben: Dreieck A(0/2) B(0/-2) C(3/c).

Bestimme einen Punkt P auf der x-Achse so, dass die Summe $\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}$ der Abstände der Ecken von P extremal wird und berechne den Winkel CPA

a) für c=0.
b) für c = 1. Gleichung 4. Grades mit Rechner lösen.

Aufgabe 4 — 12 Punkte

Gegeben: S(2/0/4), A(2/4/0)

a) Gib eine Gleichung an, welche die Punkte P(x/y/z) einer (unbegrenzten) Kegelfläche mit Spitze S, Achse SA und halbem Öffnungswinkel 60° beschreibt. Liegt der Punkt B(0/2/4) auf der Kegelfläche?
b) Ein Lichtstrahl geht von der Lichtquelle L(6/12/6) in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ weg und trifft im Punkt R auf den Kegel auf. Bestimme R.
c) Bestimme die Tangentialebene an den Kegel im Punkt R und den Einfallswinkels des Lichtstrahls.