Kantonsschule Heerbrugg — **Matura 2005**

Mathematik GF, Teil 1 — Klasse: 4T

Dauer 90 Minuten — Lehrer: Hu

Jede Aufgabe zählt 8 Punkte.

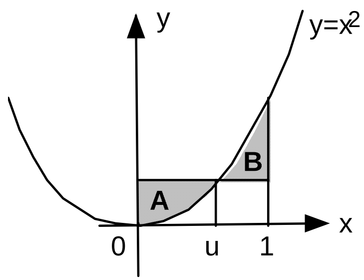
Die Formelsammlung der DMK ist als einziges Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen müssen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

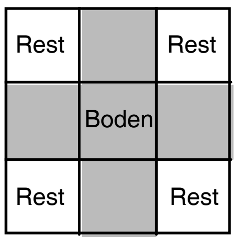
---

1. Bestimme alle Punkte der Kurve $y = \tan(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ in denen die Tangente senkrecht auf der Geraden g: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ steht?

2. Bestimme u (siehe Figur) so, dass
   a) die Flächen A und B gleich gross sind
   b) die Summe A+B der beiden Flächen
   I) minimal,
   II) maximal wird.



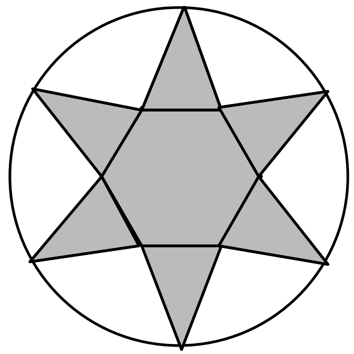
3. Aus einem Quadrat der Länge s werden 4 Ecken von quadratischer Form der Länge s/3 abgeschnitten. Aus dem verbleibenden Stück (in der Figur grau) wird eine oben offene würfelförmige Schachtel hergestellt. Aus den 4 Reststücken werden wieder 4 würfelförmige Schachteln hergestellt. Mit den Reststücken werden immer wieder neue Schachteln hergestellt.



   a) Wie gross ist das Volumen aller Schachteln zusammen (unendlich viele)?
   b) Man hört nun mit der Produktion von Schachteln nach n Schritten auf und zwar, wenn das restliche Volumen der verbleibenden Schachteln gerade kleiner als 1% des Gesamtvolumens ist. Wie gross ist dann die Seite des kleinsten noch produzierten Würfels?

4. Gegeben: Punkte S = (0/0/0), A = (4/5/1) und G = (6/12/0).
   a) Die Strecke $\overline{SG}$ wird um die Achse a = SA rotiert. G beschreibt dabei den Grundkreis eines Rotationskegel mit Mantellinie $\overline{SG}$. Bestimme das Volumen dieses Kegels.
   b) Eine Kugel mit Radius 4 wird so bewegt, dass sie die Gerade g=SG stets berührt und der Mittelpunkt M in $\prod_2$ (y, z-Ebene) liegt. Welche Kurve beschreibt dabei der Mittelpunkt M (Gleichung und Art der Kurve)?

5. a) Aus einem kreisförmigen Karton mit Radius 1 wird ein reguläres Sechseck, dem nach aussen gleichschenklige Dreiecke angefügt werden, ausgeschnitten (grau in der Figur). Die Dreiecke werden nach Innen zu einer Pyramide aufgeklappt. Für welche Sechseckseite x wird das Volumen der Pyramide am grössten?
   b) Gleiche Aufgabe mit einem n-Eck an Stelle eines Sechsecks.



Kantonsschule Heerbrugg **Matura 2005**

Mathematik GF, Teil 2 Klasse: 4T

Dauer 120 Minuten Lehrer: Hu

Jede Aufgabe zählt 10 Punkte.

Die Formelsammlung der DMK und ein CAS-Rechner (V 200, TI-89) sind als einzige Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen müssen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

---

1. Ein durch 10 t chemische Schadstoffe verunreinigter See kann jährlich 10% des noch vorhandenen Schadstoffes abbauen.
   a) Stelle eine Formel für die vorhandene Schadstoffmenge s(x) nach x Jahren auf.
   b) Welche Menge Schadstoff wird nach 10 Jahren im See noch vorhanden sein?
   c) Wenn die Schadstoffmenge im See noch 1 Prozent des Anfangswertes beträgt, dann wird der See wieder zum Baden frei gegeben. Wann wird dies der Fall sein?
   d) Bei einer Messung nach 10 Jahren wird der berechnete Wert von b) um 20 % überschritten. Aufgrund eines Fischsterbens 2 Jahre zuvor vermutet man, dass jemand erneut Chemikalien in den See gegossen hat. Wie viele Tonnen wären dies gewesen?

2. Gegeben: Ebene E durch die x-,y-,z-Achsenabschnitte 12, 12, 24.
   Punkt M=(5/6/30).
   a) Ein Massenpunkt wird im Punkt M fallen gelassen. In welchem Punkt M_1 und unter welchem Winkel trifft er auf die Ebene E auf?
   b) Anstelle eines Massenpunktes wird eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r=6 fallen gelassen. In welchem Punkt P schlägt die Kugel auf die Ebene auf?
   c) Die Kugel rollt nun (ohne zu springen oder gleiten) die Ebene hinunter bis sie die x,y-Ebene in Q berührt. Wieviele Umdrehungen hat die Kugel zwischen den Berührungspunkten gemacht?

3. Ein Flugzeug fliegt in 10'000 m Höhe auf dem kürzesten Weg von Zürich (9^0 Ost, 47^0 Nord) nach Los Angeles (118^0 West, 24^0 Nord). Die Geschwindigkeit beträgt 800 km/h. Erdradius 6371 km.
   a) Wie lange braucht das Flugzeug von Zürich nach Los Angeles?
   b) Wann erreicht das Flugzeug Los Angeles (Ortszeit), wenn es in Zürich um 10 Uhr morgens gestartet ist? Die Zeitzonen folgen sich in Abständen von 15 Längengraden, wobei die Zeitzone des Nullmeridians (westeuropäische Zeit) von -7.5^0 bis 7.5^0 reicht.
   c) Wo überquert das Flugzeug den Nullmeridian (geografische Breite angeben)?
   d) Welches ist der nördlichst gelegene Punkt der Erdkugel, welchen das Flugzeug überfliegt (kartesische Koordinaten genügen).
   e) Fliegt das Flugzeug über Grönland? Grönland reicht auf dem Längengrad 22^0 West von 63^0 bis 67^0 Nord.

4. Eine Parabel y=p(x) mit möglichst kleinem Grad hat Nullstellen bei x=4 (Punkt B) und x=k (Punkt C) und geht durch den Punkt A=(-2/4).
   a) Bestimme das Polynom p(x), welches die obigen Bedingungen erfüllt. Diskutiere die Spezialfälle bei denen C gleiche x-Koordinate wie A, bzw. B hat.
   b) Berechne die Fläche, welche von p(x) und der Geraden g durch A und B zwischen den Schnittpunkten eingeschlossen wird. Was passiert, wenn C ausserhalb des Intervalls [-2,4] liegt?
   c) Für welches k halbiert die Gerade durch C senkrecht zur x-Achse die Fläche von b)? Diskutiere alle erhaltenen Resultate.
   d) Für welches $k \in [-2,4]$ halbiert die Normale von C auf g die Fläche von b)?