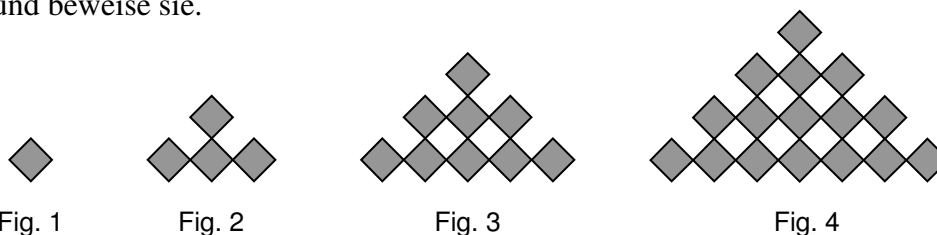


Hilfsmittel: Formelsammlung „Fundamentum Mathematik und Physik“ ohne persönliche Ergänzungen, jedoch kein Rechner.  
Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

**Aufgabe 1** (2 Punkte)

Es sei  $q_n$  die Zahl der grauen Quadrate, aus denen die Figur Nr.  $n$  besteht. Stelle eine Formel für  $q_n$  auf und beweise sie.



**Aufgabe 2** (2 Punkte)

Für welche Zahl  $k$  beschreibt die Gleichung  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + k = 0$  einen Kreis mit dem Radius  $r=3$ ?

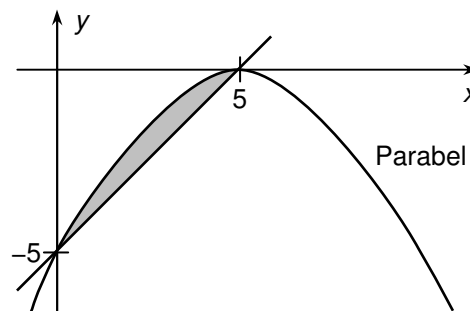
**Aufgabe 3** (4 Punkte)

Spiegle die Gerade  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  an der  $xy$ -Ebene.

- Welches ist die Parameterdarstellung der gespiegelten Geraden  $g^*$ ?
- In welchem Punkt schneiden sich  $g$  und  $g^*$ ?
- Es sei  $\alpha$  der Schnittwinkel von  $g$  und  $g^*$ . Berechne  $\cos \alpha$ . Was kann man (ohne weitere Rechnung) über  $\alpha$  aussagen?

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Berechne den Inhalt der markierten Fläche.



**Aufgabe 5** (4 Punkte)

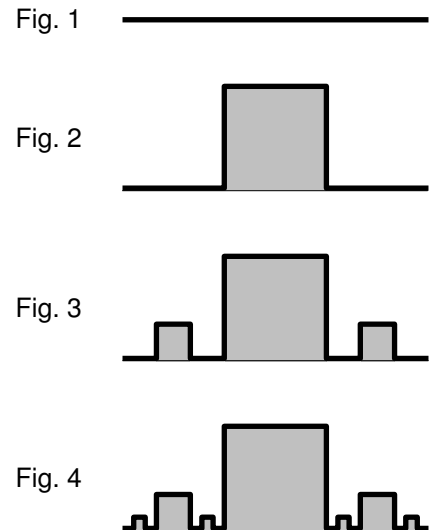
Der Graph der Funktion  $f(x) = a \cdot e^{bx^2}$  schneidet die  $y$ -Achse bei  $y=1$  und hat bei  $x=1$  eine Wendestelle. Bestimme  $a$  und  $b$ .

---

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

Eine Strecke von der Länge 3 ist gegeben (Fig. 1). Über dem mittleren Drittel wird ein Quadrat platziert (Fig. 2). Mit den beiden Reststrecken verfährt man ebenso (Fig. 3). Von der ursprünglichen Strecke bleiben jetzt noch vier Teilstrecken übrig, über denen man weitere Quadrate errichtet (Fig. 4), und so weiter.

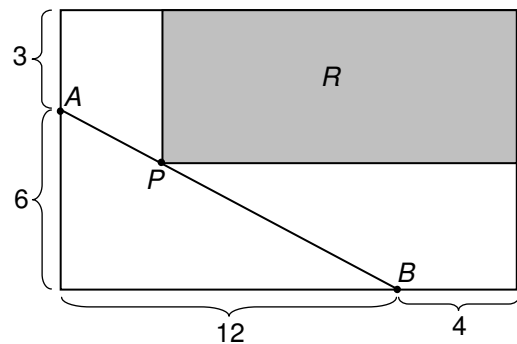
- Wie gross ist die grau markierte Fläche?
- Wie lang ist die fett ausgezogene Linie?



---

**Aufgabe 7** (4 Punkte)

Der Punkt  $P$  liegt auf der Strecke  $AB$ .  
Wie gross ist die Rechtecksfläche  $R$  höchstens?



---

**Aufgabe 8** (4 Punkte)

Welcher Punkt der Kurve  $y = \sqrt{x+1}$  liegt am nächsten beim Punkt  $A(1|0)$ ?

---

**Aufgabe 9** (4 Punkte)

Der Kugel  $x^2 + y^2 + z^2 = 36$  wird ein gerader Kreiskegel mit der Spitze  $S(4|2|-4)$  und der Höhe  $h=9$  einbeschrieben. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Grundkreises des Kegels.

---

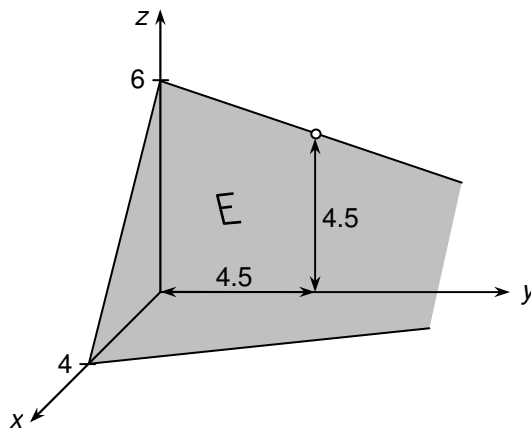
**Aufgabe 10** (4 Punkte)

Die  $x$ -Achse, die Gerade  $y=8$  und die Parabel  $y = x^2 - 1$  schliessen gemeinsam eine Fläche ein. Diese dreht man um die  $y$ -Achse. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

Hilfsmittel: Taschenrechner TI-89 (sowie allfälliges Ersatzgerät) und Formelsammlung „Fundamentum Mathematik und Physik“ ohne persönliche Ergänzungen.  
Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

**Aufgabe 1** (4 Punkte)

- Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene  $E$ .
- Welchen Abstand hat der Ursprung von dieser Ebene?
- Wie gross ist der Winkel, den die Ebene  $E$  mit der  $xz$ -Ebene bildet?



**Aufgabe 2** (4 Punkte)

Ein Stück Draht wird entzweigeschnitten. Das eine Teilstück wird zu einem Quadrat, das andere zu einem Kreis gebogen. In welchem Verhältnis muss man das Drahtstück teilen, damit die Summe der Flächeninhalte minimal wird?

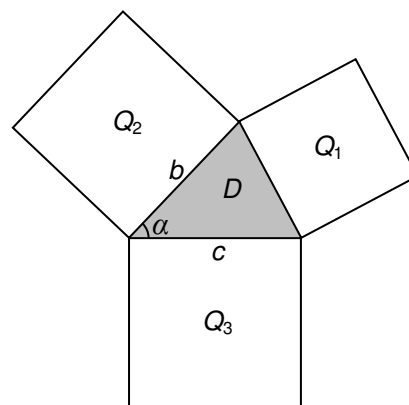
**Aufgabe 3** (5 Punkte)

Zwei Punkte  $A(2|4|-1)$  und  $B(-1|1|5)$  sowie die Gerade  $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  sind gegeben.

- Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, der durch die Punkte  $A$  und  $B$  geht und dessen Mittelpunkt auf  $g$  liegt.
- Welchen Winkel bildet die Gerade  $g$  mit der Ebene des Kreises?

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Das Dreieck  $D$  hat die festen Seitenlängen  $b$  und  $c$ . Der Winkel  $\alpha$  ist variabel. Die drei Quadratflächen sind zusammen stets grösser als die Dreiecksfläche. Für welchen Winkel  $\alpha$  ist  $Q_1 + Q_2 + Q_3 - D$  minimal?



---

**Aufgabe 5** (7 Punkte)

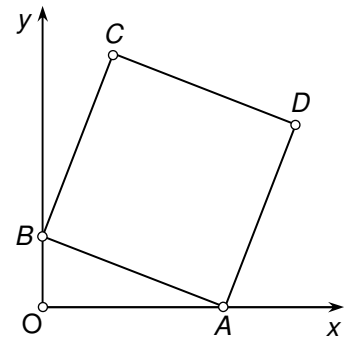
Gegeben ist die Schar von Funktionen  $f_k(x) = \frac{1}{6k}x^3 - x^2 + \frac{3k}{2}x$ .

- Bestimme den Wendepunkt des Graphen von  $f_k$ .
  - Welches ist der geometrische Ort aller Wendepunkte?
  - Für welche Werte von  $k$  steht die Wendetangente senkrecht zur Tangente bei  $x=0$ ?
  - Die  $y$ -Achse, die Wendetangente und die Strecke vom Ursprung zum Wendepunkt bilden ein Dreieck. In welchem Verhältnis teilt der Graph von  $f_k$  die Dreiecksfläche?
- 

**Aufgabe 6** (4 Punkte)

Die vier Punkte  $A(a|0)$ ,  $B(0|b)$ ,  $C$ ,  $D$  bilden ein Quadrat, welches im 1. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

- Bestimme die Koordinaten von  $D$  aus  $a$  und  $b$ .
- Auf welcher Kurve liegen alle Punkte  $D$ , wenn das Dreieck  $OAB$  den konstanten Flächeninhalt 1 hat? (Kurvengleichung angeben, Kurve mit Rechnerhilfe skizzieren)



---

**Aufgabe 7** (4 Punkte)

Eine  $n$ -gliedrige arithmetische Folge  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  hat die folgenden Eigenschaften: Die Summe der ersten drei Glieder beträgt 15, jene der letzten drei Glieder 87, und die Summe aller  $n$  Glieder beträgt 187. Bestimme die ersten drei Glieder.

---

**Aufgabe 8** (4 Punkte)

- Die Fläche, welche unten durch die  $x$ -Achse und oben durch die Kurve  $y = \frac{x-1}{x^2}$  begrenzt wird, ist unendlich gross. Dreht man diese aber um die  $x$ -Achse, so entsteht ein Körper mit endlichem Volumen. Berechne dieses Volumen.
- Durch einen ebenen Schnitt  $x=c$  soll das Volumen halbiert werden. Berechne  $c$  mit einer Genauigkeit von  $\pm 0.001$ .