

Grundlagenfach Mathematik

Klassen: NaPa, NbPb

Lehrpersonen: Hu, Ss

Teil 1

Dauer: 90 Minuten

Die Formelsammlung der DMK ist als einziges Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden; unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge. Jede Aufgabe zählt 5 Punkte

1. Eine Kugel mit Mittelpunkt $M(2/4/0)$ hat den Punkt $A(4/5/-2)$ auf der Oberfläche.
 - a) Bestimme die Gleichung der Kugel.
 - b) B sei der Punkt auf der Kugeloberfläche, welcher der Ebene
$$E: x + 2y + 2z + 26 = 0$$
am nächsten liegt. Berechne den Abstand von B zu E .

2. Einem Quadrat mit der Seitenlänge a ist ein Kreis, diesem wieder ein Quadrat usw. einbeschrieben.
Ermittle die (unendliche) Summe aller Kreisflächeninhalte.

3. $f_n(x) = n^2x^3 - nx^2 + x \quad (n \in \mathbb{N})$
 - a) Zeige, dass die Wendepunkte W_n dieser Funktionen auf einer Geraden liegen. Gib die Gleichung der Geraden an.
 - b) Untersuche, ob die Wendetangenten parallel sind, zusammenfallen oder sich schneiden.

4. Bestimme den Inhalt der Fläche, die durch die y -Achse und die Kurven
$$y = \sin x, x \geq 0, \text{ und } y = \cos x, x \geq 0,$$
(bis zum ersten Schnittpunkt) begrenzt wird.

5. Ein vom Punkt $A(0/-2/1)$ kommender Lichtstrahl hat die Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und wird an der Ebene
$$E: x + 3y + 2z - 24 = 0$$
reflektiert.
 - a) Bestimme den Reflexionspunkt X .
 - b) Bestimme eine Parameterform des reflektierten Lichtstrahls.

6. Eine Studentin erhält ein Darlehen D . Sie verpflichtet sich, dieses in 8 gleich grossen jährlichen Raten zurückzuzahlen, wobei die erste Rate 6 Jahre nach Erhalt des Darlehens zu leisten ist. Der Zinsfuss beträgt $p\%$.
Wie gross ist eine Rate?

Zugelassen sind die DMK-Formelsammlung und der Taschenrechner TI-89 oder TI-92. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden. Unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge. Jede Aufgabe zählt 10 Punkte.

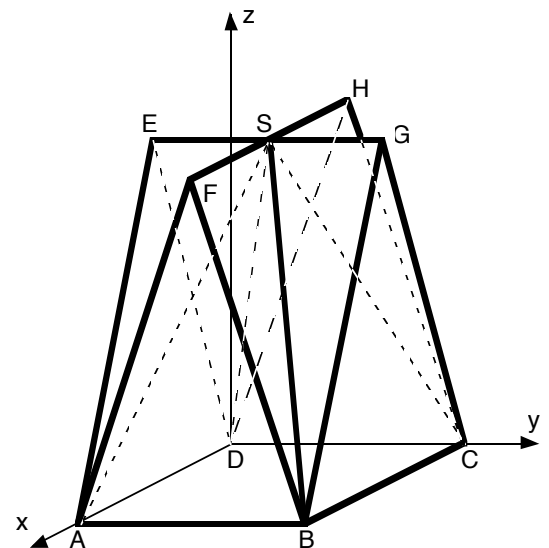
1. $P=(u/v)$ sei ein beliebiger Punkt auf der Parabel mit der Gleichung

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

- Bestimme P so, dass im Dreieck ABP mit $A=(-2/0)$ und $B=(u/0)$ die Summe der Kathetenlängen maximal ist.
- Wenn sich das Dreieck ABP um die x-Achse dreht, so entsteht ein Kegel. Wie gross kann der Rauminhalt eines solchen Kegels höchstens werden?
- Der maximale Kegel aus Teilaufgabe b) wird aus dem Drehkörper der Parabel (Drehung um x-Achse) herausgeschnitten. Wieviel Prozent Abfall entsteht dabei?
- Die Normale an die Parabel in P schneidet die x-Achse im Punkt N. Bestimme P so, dass das Dreieck ANP den grösstmöglichen Flächeninhalt hat. Wie gross ist der maximale Flächeninhalt?

2. Das Dach eines Turmes über einer quadratischen Grundfläche hat die nebenstehende Form (Längeneinheit: 1 m)

$A=(4/0/0)$, $B=(4/4/0)$, $C=(0/4/0)$, $D=(0/0/0)$
 $E=(2/0/6)$, $F=(4/2/6)$, $G=(2/4/6)$, $H=(0/2/6)$.

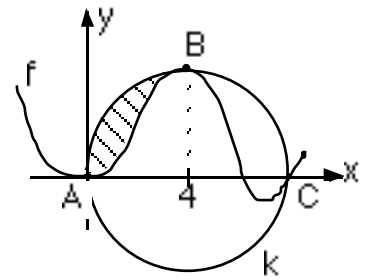


- Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E_1 , in der die Punkte A, B und S liegen. Welchen Winkel α schliesst die Ebene E_1 mit der Geraden DS ein? Welchen Winkel β schliesst die Ebene E_1 mit der Ebene E_2 ein, in der die Dachfläche BCFG liegt?

- In der Mitte der Strecke OA ist eine 7 m lange Stange verankert. Sie steht senkrecht zur Ebene E_2 aus Teilaufgabe a) und durchstösst die Giebelfläche BCG. Ist diese Stange als Fahnenstange zu verwenden, wenn zur Aufhängung der Fahne die Stange mindestens 2.75 m ins Freie ragen muss?
- Am Ende der 7 m langen Stange aus Teilaufgabe b) wird an einer Kette eine Kugel befestigt. Welchen Radius darf die Kugel höchstens haben, damit sie die Giebelfläche BCG nicht berührt?

3. a) Bestimme ein Polynom f mit kleinstmöglichem Grad, das die folgenden Bedingungen erfüllt: Der Graph (muss nicht der Skizze entsprechen) hat

- im Nullpunkt A eine horizontale Tangente,
- berührt den Kreis k mit Radius 4 in B und
- hat in C eine Wendestelle.
- Die schraffierte Fläche beträgt 6.



- b) Skizziere die wirkliche Kurve (inkl. Kreis)!
Tipp: Die Rechnung geht schneller, wenn in der Funktion ein numerischer Wert verwendet wird!
- c) Wähle für die Fläche einen Parameter k (anstelle von 6). Kann k beliebig gewählt werden (mit Begründung)? Wenn ja, skizziere die Kurve für $k=0$ (inkl. Kreis)!
- d) Diskutiere das asymptotische Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ in Abhängigkeit von k !
4. Ein Flugzeug fliegt auf der Achse des Bösen (frei nach G.W.Busch) von Pjöngjang in Nordkorea (126° Ost, 39° Nord) in 10 km Höhe auf einem Grosskreis nach Karthum im Sudan (33° Ost, 16° Nord). Erdradius $r = 6371$ km
- a) Das Flugzeug benötigt 8 Stunden. Welches ist seine mittlere Geschwindigkeit?
- b) An welchem Punkt (Geographische Länge) überquert das Flugzeug den Äquator?
- c) Welches ist der höchste Punkt der Flugbahn (kartesische Koordinaten genügen)?
- d) Auch der Irak soll nach Bush auf der Achse des Bösen liegen (d.h. auf demselben Grosskreis, auf dem Pjöngjang und Karthum liegen). Prüfe diese Behauptung nach!
Der Irak reicht auf dem Meridian 44° Ost durch Bagdad vom Breitengrad 27° bis 37.5° Nord.