Kantonsschule Heerbrugg **Matura 2001**

Maturitätstypen: B, E
Klassen: Mg, Mwa, Mwb
Teil 1

Fach: Mathematik
Lehrer: Hu, Td, Fi
Dauer: 110 Minuten

Die Formelsammlung der Kantonsschule Zelgli, Aarau ist als einziges Hilfmittel zugelassen. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden; unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

1. Die Summe aller Glieder einer unendlichen geometrischen Folge beträgt 9, die Summe ihrer ersten zwei Glieder 5. Berechne das erste Glied a_1 und q. — 3 Pte.

2. Für welchen Wert des Parameters $a > 0$ schliesst die Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ zusammen mit der x-Achse im ersten Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt 6 ein? — 4 Pte.

3. Gegeben sind die Ebenen α: $3x + 4y + 2z + 1 = 0$, β: $2x + y + 3z + 4 = 0$ und γ: $3x + y + cz + 12 = 0$. Bestimme c, sodass die Schnittgerade der Ebenen α und β parallel ist zur Ebene γ. — 5 Pte.

4. — 5 Pte.
   a) Der Graph der Funktion f: $y = -2x^3 + 3$ wird um a Einheiten nach unten verschoben, sodass das Bild durch den Punkt P(1 / –3) geht. Berechne a und die Gleichung der verschobenen Kurve.
   b) Der Graph der Funktion g: $y = x^2 + 4x$ wird um den in (a) bestimmten Wert a nach rechts verschoben. Bestimme die Gleichung der verschobenen Kurve und zeige, dass sie auch durch den Punkt P geht.
   c) Bestimme die x-Koordinate sämtlicher Schnittpunkte der beiden verschobenen Kurven.

5. Die Gerade g: $y = a^2$ $(a > 0)$ schneidet die Parabel p: $y = x^2$ in zwei Punkten A und B. Es sei F_1 die Fläche zwischen g und p, F_2 die Fläche berandet durch p und die Tangenten an p in den Punkten A und B. — 5 Pte.
   Zeige: $F_1 = 2F_2$

6. Von einem gleichschenkligen Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD sind die Ecken A(1 / 4), B(–2 / –5) und C(–4 / –1) gegeben. Bestimme die Koordinaten der fehlenden Ecke D. 5 Pte.

7. Die Graphen der Funktionen y = 2sin(x) und y = tan(x) schliessen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechne den exakten Flächeninhalt. 4 Pte.
   Tipp: $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + c$

8. Die Kurvennormale und die Kurventangente von $y = e^{-cx}$ (c > 0) im Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse bilden zusammen mit der x-Achse ein Dreieck. Für welchen Wert von c ist F extremal? 5 Pte.

9. Eine Laserlichtquelle befindet sich im Punkt A(–2 / 49). Sie sendet parallel zur y-Achse einen Lichtstrahl nach unten. Der Lichtstrahl wird an der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ reflektiert. 6 Pte.
   a) Bestimme die Koordinaten vom Reflexionspunkt R.
   b) Wie lautet die Gleichung der Kurventangente im Punkt R?
   c) Der Lichtstrahl wird im Punkt R an der Kurventangente reflektiert. Zeige, dass der reflektierte Lichtstrahl durch den Brennpunkt F(0 / 2,5) geht.

Kantonsschule Heerbrugg **Matura 2001**

Maturitätstypen: B, E
Klassen: Mg
Teil 2

Fach: Mathematik
Lehrer: Hu
Dauer: 110 Minuten

Zugelassen sind die Formelsammlung der Kantonsschule Zelgli, Aarau und der Taschenrechner TI-83. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden; unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

1. Eine Ebene ε hat die Achsenabschnitte a = 4, b = 1, c = 5. Wie gross ist der Winkel zwischen der z-Achse und der Ebene ε? 3 Pte.

2. a) Die schraffierte Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne für a = 3 das Volumen des Rotationskörpers. 6 Pte.
   b) Für welchen Wert von a beträgt die schraffierte Fläche $\frac{4}{5}$ der Quadratfläche?
   c) Berechne a, sodass die Kurve eine Diagonale des Quadrates berührt.

3. Ein Glacehersteller möchte Mini-Cornets auf den Markt bringen. Er verlangt, dass die Mini-Cornets die Form eines geraden Kreiskegels mit einem Inhalt von 12 cm^3 haben sollen. Wie gross werden Radius und Höhe des Kegels, wenn möglichst wenig Waffel verwendet wird? 5 Pte.
   (Der Nachweis des Minimums ist nicht nötig.)

4. A(0 / 0), B(1 / 0)
   Bestimme auf dem Graphen der Funktion y = tan(x) einen Punkt C, sodass der Winkel ACB 90° beträgt. 4 Pte.

5. Bei einer Spirale mit unendlich vielen Streckenteilen wird jede neue Strecke um 60° gedreht und ist halb so lang wie die vorhergehende. 4 Pte.
   a) Wie lang ist die Spirale?
   b) Gegen welchen Punkt S konvergiert die Spirale? (Es ist nur die x-Koordinate von S zu berechnen.)

6. Von einem an einem 100 Meter breiten Fluss gelegenen Elektrizitätswerk wird zu einer s Meter flussaufwärts auf dem gegenüberliegenden Ufer stehenden Fabrik eine elektrische Leitung gelegt. Die Kosten der Erdverlegung am Ufer entlang betragen Fr. 50.-/m, jene für die Verlegung unter Wasser Fr. 130.-/m. Wie lang ist das erdverlegte Leitungsstück entlang des Flusses im kostengünstigsten Fall? (Der Nachweis des Minimums ist nicht nötig.) — 6 Pte.

7. Eine Ebene ε geht durch die Punkte A(–4 / 8 / 1), B(4 / 12 / 2) und P(–10 / 0 / 9). — 7 Pte.
   a) In der Ebene ε sind die Punkte C mit positiver z-Koordinate und D so zu bestimmen, dass sie zusammen mit den Punkten A und B ein Quadrat bilden.
   b) Die Spitze S einer quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD liegt auf der Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 25x + 8y + 4z + 120 = 0$. Bestimme die Kordinaten von S so, dass das Pyramidenvolumen möglichst klein wird.
   Tipp: (b) kann auch ohne (a) gelöst werden.

8. Ein Lift in einem Wolkenkratzer bewegt sich vom Anfangspunkt (t = 0) bis zum Parterre (Höhe 0 m). Die Höhe h(t) des Lifts in m beträgt nach t Sekunden — 7 Pte.
$$h(t) = \frac{1}{160}t^3 - \frac{9}{20}t^2 + 6t + 80$$
   a) Wann erreicht der Lift das Parterre?
   b) Wann erreicht der Lift die maximale Höhe?
   c) Wie gross ist die maximale Geschwindigkeit?
   d) Bestimme die maximale Beschleunigung.
   e) Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Lifts in den ersten 20 Sekunden.