

Maturitätstypen: B, E
Klassen: Mg, Mwa, Mwb
Teil 1

Fach: Mathematik
Lehrer: Hu, Td, Fi
Dauer: 110 Minuten

Die Formelsammlung der Kantonsschule Zelgli, Aarau ist als einziges Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden; unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

1. Die Summe aller Glieder einer unendlichen geometrischen Folge beträgt 9, die Summe ihrer ersten zwei Glieder 5. Berechne das erste Glied a_1 und q . 3 Pte.
2. Für welchen Wert des Parameters $a > 0$ schliesst die Kurve mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax$ zusammen mit der x-Achse im ersten Quadranten eine Fläche mit dem Inhalt 6 ein? 4 Pte.
3. Gegeben sind die Ebenen $\alpha: 3x + 4y + 2z + 1 = 0$, $\beta: 2x + y + 3z + 4 = 0$ und $\gamma: 3x + y + cz + 12 = 0$. Bestimme c , sodass die Schnittgerade der Ebenen α und β parallel ist zur Ebene γ . 5 Pte.
4. a) Der Graph der Funktion $f: y = -2x^3 + 3$ wird um a Einheiten nach unten verschoben, sodass das Bild durch den Punkt $P(1 / -3)$ geht. Berechne a und die Gleichung der verschobenen Kurve. 5 Pte.
b) Der Graph der Funktion $g: y = x^2 + 4x$ wird um den in (a) bestimmten Wert a nach rechts verschoben. Bestimme die Gleichung der verschobenen Kurve und zeige, dass sie auch durch den Punkt P geht.
c) Bestimme die x-Koordinate sämtlicher Schnittpunkte der beiden verschobenen Kurven.
5. Die Gerade $g: y = a^2$ ($a > 0$) schneidet die Parabel $p: y = x^2$ in zwei Punkten A und B. Es sei F_1 die Fläche zwischen g und p , F_2 die Fläche berandet durch p und die Tangenten an p in den Punkten A und B. 5 Pte.
Zeige: $F_1 = 2F_2$

6. Von einem gleichschenkligen Trapez ABCD mit den parallelen Seiten AB und CD sind die Ecken A(1 / 4), B(-2 / -5) und C(-4 / -1) gegeben. Bestimme die Koordinaten der fehlenden Ecke D. 5 Pte.
7. Die Graphen der Funktionen $y = 2\sin(x)$ und $y = \tan(x)$ schliessen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Berechne den exakten Flächeninhalt. 4 Pte.
Tipp: $\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + c$
8. Die Kurvennormale und die Kurventangente von $y = e^{-cx}$ ($c > 0$) im Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse bilden zusammen mit der x-Achse ein Dreieck. Für welchen Wert von c ist F extremal? 5 Pte.
9. Eine Laserlichtquelle befindet sich im Punkt A(-2 / 49). Sie sendet parallel zur y-Achse einen Lichtstrahl nach unten. Der Lichtstrahl wird an der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ reflektiert. 6 Pte.
- Bestimme die Koordinaten vom Reflexionspunkt R.
 - Wie lautet die Gleichung der Kurventangente im Punkt R?
 - Der Lichtstrahl wird im Punkt R an der Kurventangente reflektiert. Zeige, dass der reflektierte Lichtstrahl durch den Brennpunkt F(0 / 2,5) geht.

Maturitätstypen: B, E

Fach: Mathematik

Klassen: Mg

Lehrer: Hu

Teil 2

Dauer: 110 Minuten

Zugelassen sind die Formelsammlung der Kantonsschule Zelgli, Aarau und der Taschenrechner TI-83. Die Lösungen sollen sauber und übersichtlich dargestellt werden; unvollständige Lösungswege haben Punkteabzug zur Folge.

1. Eine Ebene ε hat die Achsenabschnitte $a = 4$, $b = 1$, $c = 5$. Wie gross ist der Winkel zwischen der z-Achse und der Ebene ε ? 3 Pte.

2. a) Die schraffierte Fläche rotiert um die x-Achse. 6 Pte.
Berechne für $a = 3$ das Volumen des Rotationskörpers.
b) Für welchen Wert von a beträgt die schraffierte Fläche $\frac{4}{5}$ der Quadratfläche?
c) Berechne a , sodass die Kurve eine Diagonale des Quadrates berührt.

3. Ein Glacehersteller möchte Mini-Cornets auf den Markt bringen. Er verlangt, dass die Mini-Cornets die Form eines geraden Kreiskegels mit einem Inhalt von 12 cm^3 haben sollen. Wie gross werden Radius und Höhe des Kegels, wenn möglichst wenig Waffel verwendet wird? 5 Pte.
(Der Nachweis des Minimums ist nicht nötig.)

4. $A(0 / 0)$, $B(1 / 0)$ 4 Pte.
Bestimme auf dem Graphen der Funktion $y = \tan(x)$ einen Punkt C, sodass der Winkel ACB 90° beträgt.

5. Bei einer Spirale mit unendlich vielen Streckenteilen wird jede neue Strecke um 60° gedreht und ist halb so lang wie die vorhergehende. 4 Pte.
a) Wie lang ist die Spirale?
b) Gegen welchen Punkt S konvergiert die Spirale? (Es ist nur die x-Koordinate von S zu berechnen.)

6. Von einem an einem 100 Meter breiten Fluss gelegenen Elektrizitätswerk wird zu einer s Meter flussaufwärts auf dem gegenüberliegenden Ufer stehenden Fabrik eine elektrische Leitung gelegt. Die Kosten der Erdverlegung am Ufer entlang betragen Fr. 50.-/m, jene für die Verlegung unter Wasser Fr. 130.-/m. Wie lang ist das erdverlegte Leitungsstück entlang des Flusses im kostengünstigsten Fall? (Der Nachweis des Minimums ist nicht nötig.) 6 Pte.
7. Eine Ebene ε geht durch die Punkte $A(-4 / 8 / 1)$, $B(4 / 12 / 2)$ und $P(-10 / 0 / 9)$. 7 Pte.
- In der Ebene ε sind die Punkte C mit positiver z-Koordinate und D so zu bestimmen, dass sie zusammen mit den Punkten A und B ein Quadrat bilden.
 - Die Spitze S einer quadratischen Pyramide mit der Grundfläche ABCD liegt auf der Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 25x + 8y + 4z + 120 = 0$. Bestimme die Koordinaten von S so, dass das Pyramidenvolumen möglichst klein wird.
Tipp: (b) kann auch ohne (a) gelöst werden.
8. Ein Lift in einem Wolkenkratzer bewegt sich vom Anfangspunkt ($t = 0$) bis zum Parterre (Höhe 0 m). Die Höhe $h(t)$ des Lifts in m beträgt nach t Sekunden 7 Pte.
- $$h(t) = \frac{1}{160} t^3 - \frac{9}{20} t^2 + 6t + 80$$
- Wann erreicht der Lift das Parterre?
 - Wann erreicht der Lift die maximale Höhe?
 - Wie gross ist die maximale Geschwindigkeit?
 - Bestimme die maximale Beschleunigung.
 - Berechne die mittlere Geschwindigkeit des Lifts in den ersten 20 Sekunden.