Maturprüfung 2014
Mathematik – Profile A & B

Anzahl Seiten (ohne Deckblatt):	4
Inhalt:	Maturitätsprüfung 2014 Mathematik schriftlich, Profile A & B
Anweisungen/ Erläuterungen:	Verwenden Sie **für jede Aufgabe ein neues Blatt**
Hilfsmittel:	Formelsammlung DMK Taschenrechner TI-83, TI83+, TI84+, TI84+ Silver Edition
Bewertung:	maximal 68 Punkte Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angeschrieben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Mathematik

Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe eine neue Seite.

Dauer: Vier Stunden

Hilfsmittel: Formeln, Tabellen, Begriffe (DMK),
Taschenrechner TI-83, TI-84, TI-84 Plus

Bewertung: Die maximal möglichen Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

---

1. $\boxed{4 + 5 + 3 = 12 \text{ Punkte}}$

Gesucht wird die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion (ganzrationalen Funktion) 4. Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

- Ihr Graph ist symmetrisch bei Spiegelung an der y-Achse.
- Sie besitzt an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle.
- Die Steigung der Tangente im Wendepunkt $W(1\,,\,?)$ beträgt -1

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Sollten Sie a) nicht lösen können, verwenden Sie als Funktionsgleichung für die Aufgaben b) und c) $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4$.

b) Bestimmen Sie Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte dieser Funktion. Skizzieren Sie ihren Graphen.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Wendetangente im Wendepunkt mit positiver x-Koordinate, der Kurve und der y-Achse.

2. $4 + 2 + 3 + 4 = 13$ Punkte

Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und Spitze S kennt man den Eckpunkt $A(5, 4, 1)$ und die Spitze $S(2, 1, 13)$.
Der Eckpunkt C liegt auf der Geraden g durch die Punkte A und $P(13, 18, -7)$.

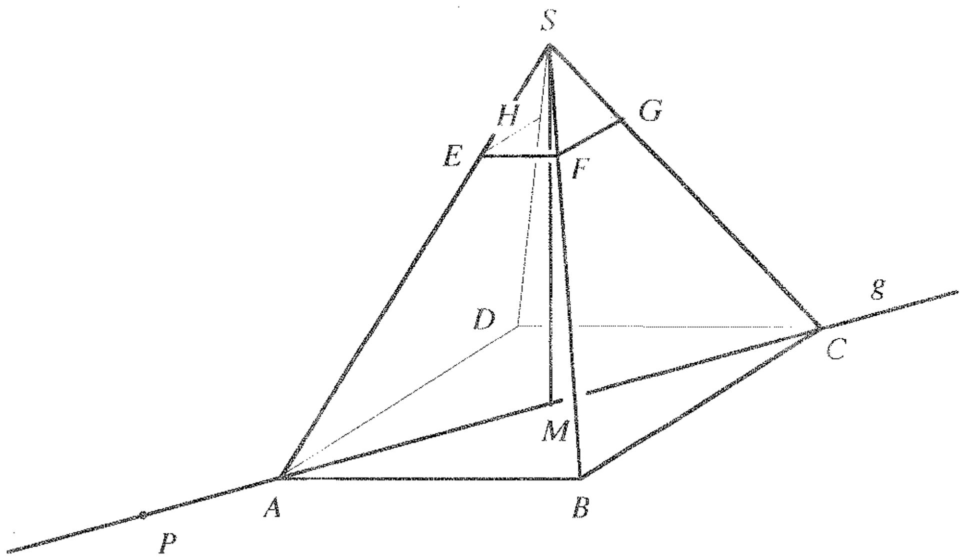
a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Quadratmittelpunktes M.

Falls Sie a) nicht lösen können, rechnen Sie mit dem Quadratmittelpunkt $M^*(9, 11, -3)$ und der Pyramidenspitze $S^*(10, 15, 5)$ weiter.

b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ε, in der das Quadrat $ABCD$ liegt.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D des Quadrates.

d) Der Pyramidenstumpf $ABCDEFGH$ hat Volumen $V = 468$ (siehe Zeichnung unten). Bestimmen Sie die Koordinaten des Eckpunkts E.



3. $1+2+3+1+2=9$ Punkte

Betrachten Sie die Funktion $y = f(x) = \ln x + \ln(6-x) - \ln 5$

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass $y = F(x) = x \cdot \ln x - (6-x) \cdot \ln(6-x) - (\ln 5 + 2)x$
eine Stammfunktion von $y = f(x)$ ist.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f
und der x-Achse im ersten Quadranten (exaktes Resultat).

Für die Fortsetzung betrachten Sie die verallgemeinerte Funktion
$y = f_a(x) = \ln x + \ln(a-x) - \ln(a-1)$ für $a > 1$

d) Zeigen Sie: $x_1 = 1$ und $x_2 = a-1$ sind Nullstellen der Funktion f_a.

e) Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion f_a.

4. $3+1+1+3+3=11$ Punkte

Betrachten Sie die komplexe Abbildung der Form $f(z) = az+b$ mit $a,\ b \in \mathbb{C}$

a) Der Punkt $p = 1-i$ ist Fixpunkt der Abbildung. Zudem wird der Punkt
$z_1 = 4+3i$ auf $z_2 = -3+2i$ abgebildet.
Bestimmen Sie aus diesen Angaben a und b.

Falls Sie a) nicht lösen können, rechnen Sie mit $a^* = -i$, $b^* = -6+6i$ *und* $p^* = 6i$ *weiter.*

b) Welche geometrische Abbildung wird durch $f(z)$ beschrieben?

c) Berechnen Sie das Bild $w = f(z)$ der Geraden parallel zur imaginären Achse
durch 2.

d) $z_{n+1} = f(z_n)$ mit $z_1 = 4+3i$ definiert eine Folge für $n \in \mathbb{N}$.
Berechnen Sie z_2, z_3, z_4 und z_5. Tragen Sie alle Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene ein. Welche Figur entsteht?

e) Zeigen Sie, dass die Punkte z_1 bis z_5 auf einem Kreis liegen.
Geben Sie Kreismittelpunkt, Kreisradius und eine Kreisgleichung an.

5. $4 + 5 + 4 = 13$ Punkte

Eine Schifffahrtsgesellschaft bietet 4 unterschiedliche Ausflüge A, B, C und D an. An einem bestimmten Tag wollen 16 Personen einen Ausflug unternehmen.

a) i) Wie viele Möglichkeiten bestehen, wenn sich jede der 16 Personen für einen der 4 Ausflüge entscheidet?

ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Teilnehmerzahlen an den Ausflügen A, B, C und D, wenn sich jede der 16 Personen für einen Ausflug entscheiden kann?

b) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten, wenn alle Personen ihre Wahl zufällig treffen.

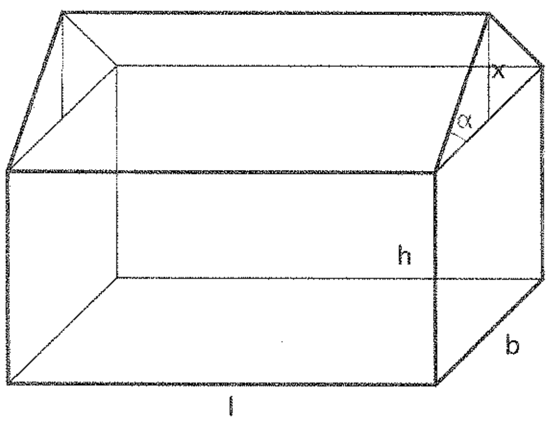
i) Niemand wählt Ausflug A.

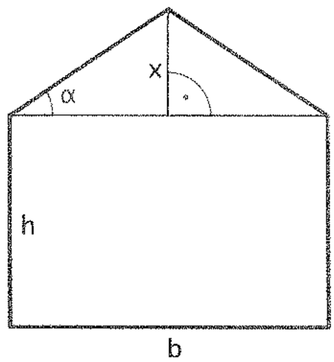
ii) Alle wählen den gleichen Ausflug.

iii) 3 Personen wählen Ausflug A, 5 Personen Ausflug B.

c) Sie sonnen sich am Ufer des Sees und fischen. Sie wissen von einer Untersuchung: In diesem See sind fast aussschliesslich Egli (Flussbarsche) zu fischen. Die Länge der Egli ist normalverteilt. Eine Stichprobe von 300 ausgewachsenen Egli ergab folgendes Resultat: Ihre mittlere Länge beträgt 21.4 cm mit der Standardabweichung 5.23 cm. Als Fischer wissen Sie, dass Egli kleiner als 14 cm wieder in den See geworfen werden müssen. Nur grössere dürfen Sie behalten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit dürfen Sie von 3 gefangenen Egli mindestens einen behalten?

6. $2 + 8 = 10$ Punkte





Ein Haus mit einem Giebeldach ist doppelt so lang wie breit. Die Dachhöhe x beträgt drei Achtel der Breite b des Hauses.

a) Die Breite des Hauses sei $b = 8$ m und die Höhe $h = 6$ m (siehe Skizze). Bestimmen Sie das Volumen des Hauses und den Neigungswinkel α des Daches.

b) Um den Wärmeverlust zu optimieren, ist es sinnvoll, die Oberfläche (alle Seiten- und Dachflächen zusammen, ohne die Grundfläche) des Hauses minimal zu wählen. Wie müssen dazu Länge, Breite und Höhe des Hauses gewählt werden, wenn das Volumen des Hauses $2016\ \text{m}^3$ betragen soll? (Der Nachweis des Minimums wird nicht verlangt.)