Aufgabe 1:

12 Punkte

Gegeben sind die Punkte A(12 / -6 / 2), B(10 / 2 / 0) und C(4 / 2 / 6).

a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C die Eckpunkte eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks sind.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass die Punkte A, B, C und D ein Quadrat bilden.

c) Die Ebene $\mathbb{E}$ enthält das Quadrat ABCD. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $\mathbb{E}$.

Die obigen Punkte A, B, C und D sind Eckpunkte eines Oktaeders $ABCDS_1S_2$ (siehe Abb. 1). Ein Oktaeder ist ein regelmässiges Polyeder, dessen Oberfläche aus acht kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht.
Das Oktaeder $ABCDS_1S_2$ ist gemäss Abb. 1 einem Würfel so einbeschrieben, dass die Eckpunkte des Oktaeders in den Mittelpunkten der Seitenflächen dieses Würfels liegen.

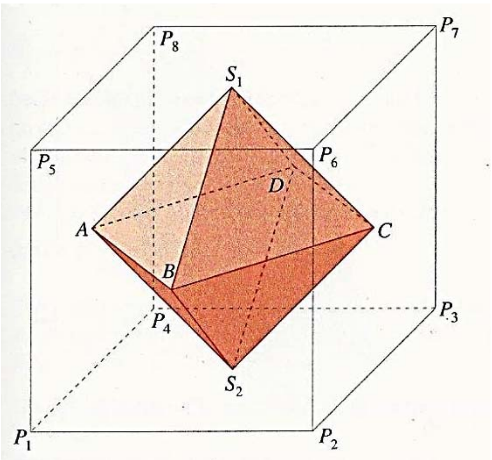


Abb. 1: Oktaeder $ABCDS_1S_2$.

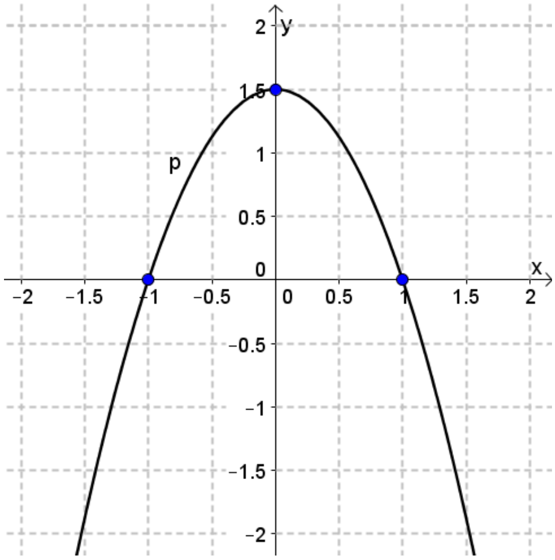
d) Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken S_1 und S_2 des Oktaeders.

e) Berechnen Sie die Koordinaten der Würfelecke P_6.

Aufgabe 2:

10 Punkte

Gegeben ist der Graph einer quadratischen Funktion p.



a) Berechnen Sie die Funktionsgleichung von p. Markierte Punkte dürfen aus dem Graphen abgelesen werden.

Im Folgenden betrachten wir eine neue Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, von der Folgendes bekannt ist:

- Die Ableitung von f ist p.
- Der Graph von f hat einen Wendepunkt bei W(? / 1).
- Der Graph von f hat ein lokales Minimum bei T(? / 0).

b) Bestimmen Sie die x-Koordinaten der beiden Punkte W und T. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

c) Berechnen Sie die Funktionsgleichung von f.

Falls Sie die Aufgabe c) nicht lösen können, verwenden Sie für die folgende Teilaufgabe die (falsche) Funktionsgleichung

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + \frac{4}{3}$$

(Beachten Sie, dass die in Teilaufgabe b) berechneten Koordinaten des Wendepunktes W nicht mehr stimmen und daher neu berechnet werden müssen.)

d) Eine Gerade durch den Wendepunkt W schneidet den Graphen von f an der Stelle $x = u$ mit $u > 0$. Zeigen Sie, dass die Gerade den Graphen von f auch an der Stelle $x = -u$ schneidet.

Aufgabe 3:

13 Punkte

Fünf Personen, Anna, Ben, Carl, Daniel und Emily, treffen sich jeweils am Dienstagabend in ihrem Stammlokal. Jede Person kann manchmal kommen, manchmal nicht. Insbesondere kann der Stammtisch auch leer sein.

a) Wie viele mögliche Zusammensetzungen von Personen am Stammtisch gibt es?

b) Wie viele mögliche Zusammensetzungen gibt es, bei denen die Anzahl Frauen mit der Anzahl Männer übereinstimmt?

c) Begründen Sie in Worten: Es gibt in jedem Jahr mindestens zwei Dienstage, an denen genau die gleiche Zusammensetzung am Stammtisch vorliegt.

Die folgende Liste zeigt die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die verschiedenen Personen am Stammtisch sind. Die An- oder Abwesenheit jeder Person ist unabhängig von der An- oder Abwesenheit der andern.

Die Person	Anna	Ben	Carl	Daniel	Emily
kommt mit Wahrscheinlichkeit	0.8	0.5	0.4	0.8	0.5

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle fünf da sind?

e) Im Januar 2016 gibt es vier Dienstage. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es im Januar 2016 zu keinem Treffen von Daniel und Emily am Stammtisch kommt?

Zum Bezahlen der Rechnung haben die Fünf folgende Abmachung getroffen: Es bezahlt immer die Person, welche von allen Anwesenden im Alphabet zuerst kommt.

f) Carl geht heute zum Stammtisch. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Rechnung bezahlen muss?

g) Carl geht heute zum Stammtisch und erfährt, dass Anna und Ben nicht kommen können. Für wie viele Personen muss er im Mittel die Rechnung bezahlen?

Aufgabe 4:

13 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^{x-1}$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts Q des Graphen von f mit der y-Achse.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Kurventangente t an den Graphen von f im Punkt B(2 / ?).

c) Der Graph von f und die Tangente aus Teilaufgabe b) begrenzen im ersten Quadranten zusammen mit den Koordinatenachsen ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt. Geben Sie die Lösung exakt an.

d) Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + c$ schneidet den Graphen von f im Punkt P(1 / ?) rechtwinklig. Berechnen Sie a und c.

Falls Sie d) nicht lösen können, verwenden Sie für die folgende Teilaufgabe die (falsche) Gleichung

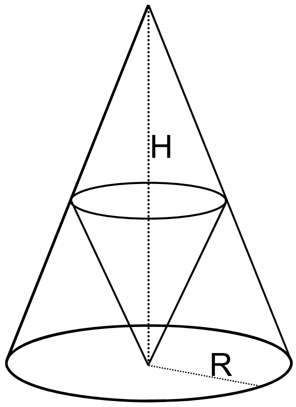
$$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}$$

e) Welcher Punkt des Parabelbogens im ersten Quadranten ist dem Koordinatenursprung am nächsten?

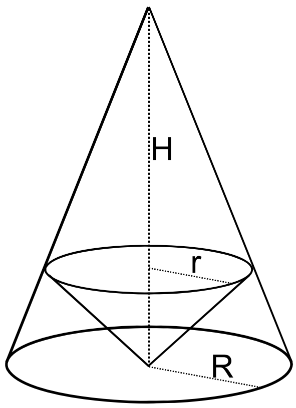
Aufgabe 5:

12 Punkte

Einem geraden Kreiskegel mit dem Radius R = 2 und der Höhe H = 6 wird ein zweiter Kreiskegel so einbeschrieben, dass dessen Spitze im Mittelpunkt des Grundkreises des ersten Kegels liegt.



a) Berechnen Sie die Mantelfläche des einbeschriebenen Kegels, wenn dieser halb so hoch ist wie der ursprüngliche Kegel. Geben Sie die Lösung exakt an.



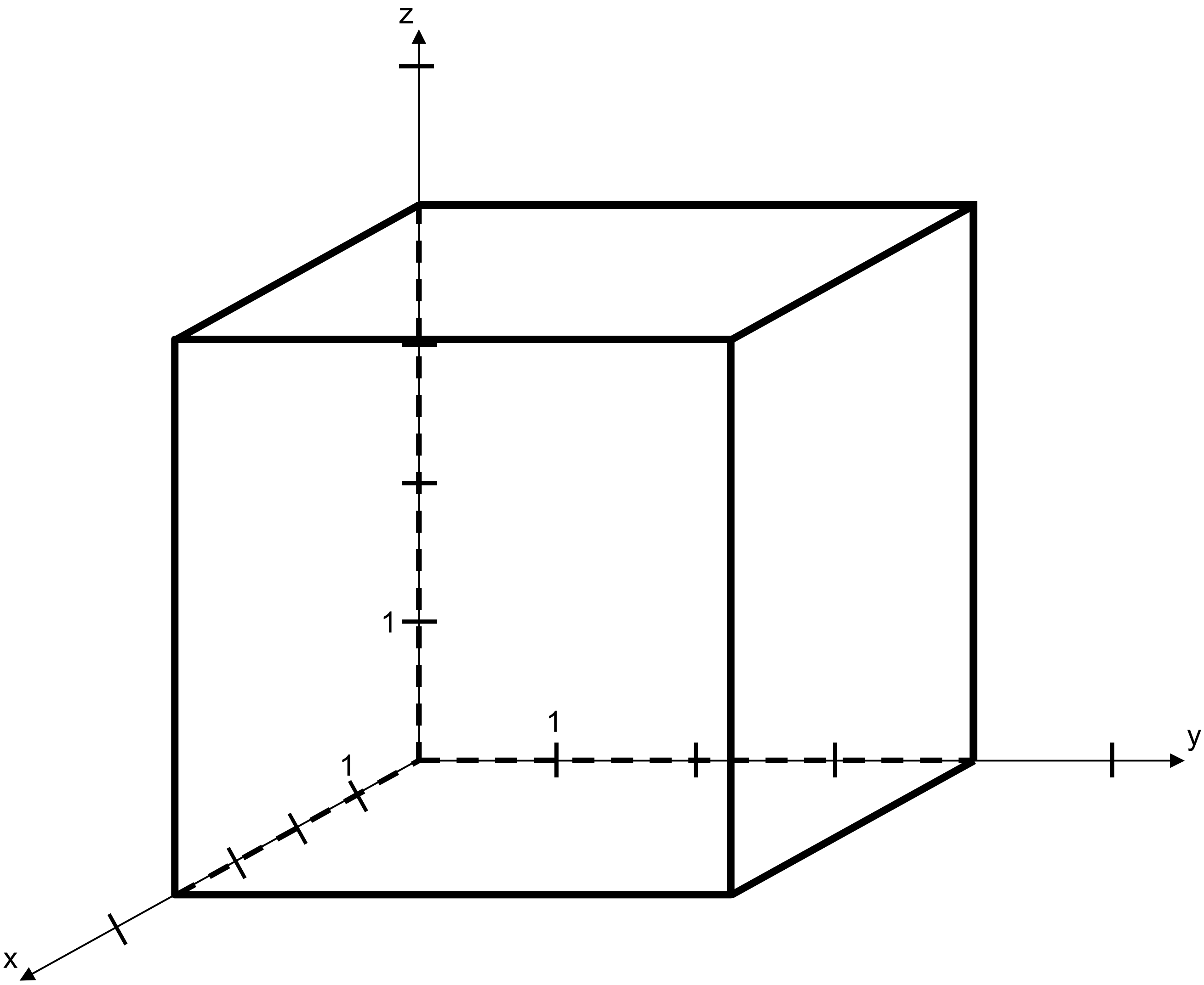
b) Leiten Sie die Funktion her, welche die Mantelfläche M des einbeschriebenen Kegels in Abhängigkeit des Radius r des einbeschriebenen Kegels beschreibt. (Zur Kontrolle: die gesuchte Funktion lautet $M(r) = \pi \cdot r\sqrt{10r^2 - 36r + 36}$)

c) Welche maximale Mantelfläche M kann der einbeschriebene Kegel erreichen?

Kurzaufgabe 6.1:

3 Punkte

Gegeben ist die Ebene $\mathbb{E}$: $x + y + z = 5$ und ein Würfel mit der Seitenlänge 4. Ein Eckpunkt des Würfels liegt im Ursprung. Je eine Kante des Würfels liegt auf dem positiven Teil der x-, der y- und der z-Achse. Färben Sie die Schnittfläche des Würfels mit der Ebene $\mathbb{E}$ ein.



Kurzaufgabe 6.2:

3 Punkte

Sie werfen zwei Mal einen regulären Spielwürfel und bestimmen so mit dem ersten Wurf den Parameter m und mit dem zweiten Wurf den Parameter q der Geraden $y = mx + q$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die so „erwürfelte" Gerade durch den Punkt P(2 / 7) verläuft?

Kurzaufgabe 6.3:

2 Punkte

Die Kurse zweier geradlinig fliegender Flugzeuge A und B sind durch die Geraden g_A und g_B gegeben, wobei $t \in \mathbb{R}$, mit $t \geq 0$ hier als Zeit in t Minuten interpretiert werden muss.

$$g_A\colon\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -21 \\ -24 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$g_B\colon\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -49 \\ -42 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vernachlässigen Sie die Ausdehnung der Flugzeuge. Prüfen Sie nach, ob die Flugzeuge zusammenstossen oder nicht.