

Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe ein neues Blatt!**

Zeit: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung Wetzel

Taschenrechner TI-83, TI83+, TI84+, TI84+ SilverEdition

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

1. Gegeben ist die Funktion

16 Punkte

$$f(x) = \frac{1}{8}(x+2) \cdot (x-4)^2 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4$$

- Bestimmen Sie Extremal- und Wendepunkte des Graphen von f .
- Der Graph von f und die x -Achse begrenzen ein Gebiet. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.
- Der Punkt P hat die x -Koordinate 6 und liegt auf dem Graphen von f .
Bestimmen Sie die Gleichung der Kurvennormalen zum Graphen von f in P .
- Der Graph von f , die Kurvennormale aus Teilaufgabe c) und die x -Achse begrenzen zusammen ein Gebiet. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

Wir betrachten nun zusätzlich die Funktion $g(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{7}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{19}{4}$.

- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g .
- Die vertikale Gerade mit der Gleichung $x = a$ schneidet die beiden Graphen in den Punkten R und S . Wie muss a gewählt werden, so dass die zugehörigen Tangenten an die Graphen in diesen Punkten R und S parallel sind?

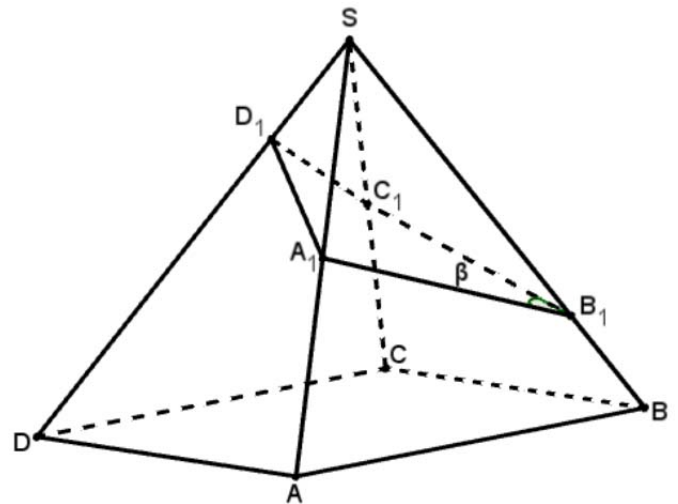
2. Gegeben ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ und Spitze S :

9 Punkte

$A(6 / 0 / 0)$, $B(0 / 6 / 0)$, $C(-6 / 0 / 0)$, $D(0 / -6 / 0)$ und $S(0 / 0 / 8)$.

Die Punkte A_1 , B_1 , C_1 und D_1 liegen auf den Pyramidenkanten in unterschiedlichen Höhen zur Pyramidengrundfläche $ABCD$: B_1 auf der Höhe 2, A_1 und C_1 auf der Höhe 4 und D_1 auf der Höhe 6.

- Berechnen Sie die Koordinaten der Punkte A_1 , B_1 , C_1 und D_1 .
- Berechnen Sie den Viereckswinkel β bei B_1 .
- Zeigen Sie, dass die Punkte A_1 , B_1 , C_1 und D_1 nicht in einer Ebene liegen.
- Wie müssten Sie die Koordinaten eines neuen Punktes D_2 auf der Kante DS wählen, damit die vier Punkte A_1 , B_1 , C_1 und D_2 auf einer Ebene liegen?
- Wir betrachten im Folgenden das Viereck $A_1B_1C_1D_2$. Um welche Art von Viereck handelt es sich? Begründen Sie Ihre Antwort.



3. Durch $f(x) = \ln(x)$ und $g(x) = 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

12 Punkte

sind zwei Funktionen gegeben.

- Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen im selben Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunkts.
- P ist ein beliebiger Punkt des Graphen von g und O der Koordinatenursprung. Zeigen Sie, dass der Mittelpunkt M der Strecke OP auf dem Graphen von f liegt.
- Legen Sie von O aus die Tangente an den Graphen von f . Zeigen Sie, dass diese Tangente an der Stelle $x = 2e$ auch den Graphen von g **berührt**.
- Es sei $Q(u / ?)$ ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f . Geben Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt Q an.
- Die Tangente t und die horizontale Gerade durch Q bilden zusammen mit der y -Achse ein rechtwinkliges Dreieck. Für welche Wahl von Q hat dieses Dreieck den Flächeninhalt 5?

4. Gegeben sind die Punkte $A(7 \mid -3 \mid 8)$ und $B(-1 \mid 5 \mid 4)$.

14 Punkte

Die Strecke AB ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ABC .

- a) In dieser Teilaufgabe liege der Punkt C auf der Geraden g durch die Punkte $P(2 \mid 0 \mid 3)$ und $Q(3 \mid 2 \mid 6)$.

- Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes C .
- Berechnen Sie den Flächeninhalt des so entstehenden Dreiecks ABC .
(Falls Sie C nicht bestimmen können: Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABP .)

Für b) und c) gilt: Der Punkt C liegt in der xy -Ebene.

- b) Bestimmen Sie die Kurve in der xy -Ebene, auf der C liegen kann, und beschreiben Sie diese Kurve mit einer Gleichung.

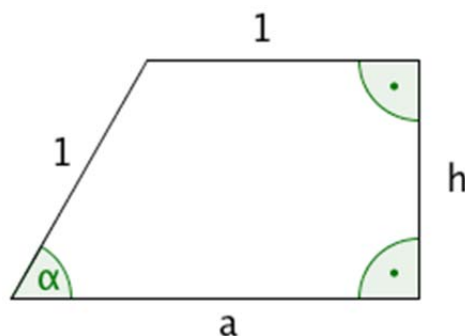
Welcher von diesen Punkten C liegt am nächsten beim Ursprung O ?

- c) Für welchen von diesen Punkten C in der xy -Ebene bekommt das Dreieck ABC den kleinsten Flächeninhalt?

5. In einem Trapez haben zwei Seiten die Länge 1 und zwei Winkel betragen 90° , wie in der Skizze angegeben.

9 Punkte

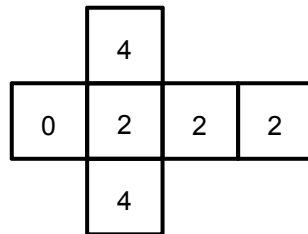
Bestimmen Sie a , h und den Winkel α so, dass die Trapezfläche maximal wird.



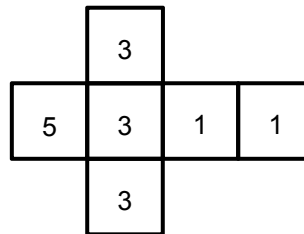
6. Gegeben sind zwei Spielwürfel A und B mit den Netzen:

13 Punkte

Würfel A:



Würfel B:



- a) Würfel A wird einmal geworfen.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine 4?
 - Welche durchschnittliche Augenzahl können Sie erwarten?
- b) Würfel B wird vier Mal geworfen.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Mal eine 1 geworfen wird?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 8 geworfen wird?
- c) Zwei Personen spielen folgendes Spiel: Die erste Person wählt einen der beiden obigen Würfel aus. Die andere Person erhält den anderen Würfel. Beide Personen würfeln einmal mit ihrem Würfel. Das Spiel gewinnt diejenige Person, welche die grössere Augenzahl würfelt.
- Nehmen wir an, Sie sind die erste Person und dürfen wählen. Für welchen Würfel entscheiden Sie sich? Begründen Sie Ihre Wahl durch eine Rechnung.
- d) Jemand vermutet, dass die Augenzahl 5 zu häufig geworfen wird. Sie möchten dies testen, indem Sie den Würfel 400 Mal werfen. Ab welcher Anzahl 5en nehmen Sie an, dass der Würfel manipuliert ist? Argumentieren Sie (Irrtumswahrscheinlichkeit 2.25%).