Mathematik
Aufnahmeprüfung 2015

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**Summe**
Punkte	4**	4*	3	2	3	3	3	2	4*	4*	4***	4	40

Punkte für die Teilaufgaben:	*	(a) 2 Punkte, (b) 2 Punkte
	**	(a) 1 Punkt, (b) 1 Punkt, (c) 2 Punkte
	***	(a) 1 Punkt, (b) 3 Punkte

Mathematik
Aufnahmeprüfung 2015

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Vereinfache so weit wie möglich: $b \cdot (4-2b) - [1-(b-2) \cdot 2b] \; = ?$

(b) Vereinfache so weit wie möglich: $\sqrt{\dfrac{30x^3}{2x} + x^2} \; = ?$

(c) Vereinfache so weit wie möglich: (schreibe als einen Bruch) $\dfrac{t-1}{2} : \dfrac{t}{3} + \dfrac{3}{t} - 1 \; = ?$

(a)
$$\begin{aligned} b \cdot (4-2b) - [1-(b-2) \cdot 2b] &= 4b - 2b^2 - 1 + (b-2) \cdot 2b \\ &= 4b - 2b^2 - 1 + 2b^2 - 4b \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

(b)
$$\sqrt{\frac{30x^3}{2x} + x^2} = \sqrt{15x^2 + x^2} = \sqrt{16x^2} = \underline{\underline{4x}}$$

oder:

$$\sqrt{\frac{30x^3}{2x} + x^2} = \sqrt{\frac{30x^3 + 2x^3}{2x}} = \sqrt{\frac{32x^3}{2x}} = \sqrt{16x^2} = \underline{\underline{4x}}$$

(c)
$$\frac{t-1}{2} : \frac{t}{3} + \frac{3}{t} - 1 = \frac{t-1}{2} \cdot \frac{3}{t} + \frac{3}{t} - 1 = \frac{3t - 3 + 6 - 2t}{2t} = \underline{\underline{\frac{t+3}{2t}}}$$

Aufgabe 2

Löse die Gleichung nach x auf.

(a) $$16 - 16(2x+1) = 6x - 3(3-4x)$$

(b) $$7x + \frac{7x+7}{2} - 8 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{7x}{3}\right)$$

(a)
$$\begin{aligned}
16 - 16(2x+1) &= 6x - 3(3-4x) && \mid \text{ TU} \\
16 - 32x - 16 &= 6x - 9 + 12x && \mid -18x \\
-50x &= -9 && \mid : (-50) \\
x &= \underline{\underline{\tfrac{9}{50}}}
\end{aligned}$$

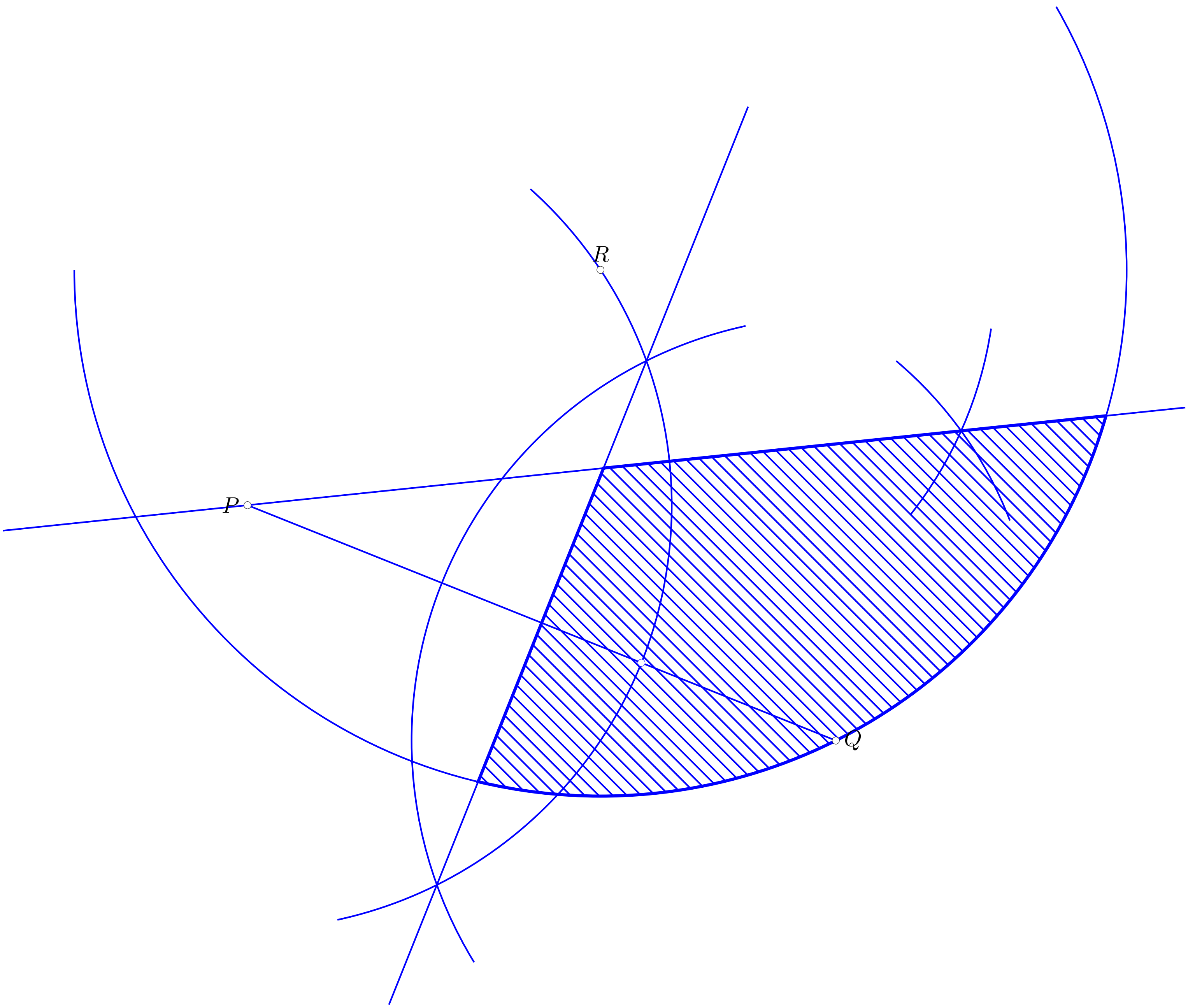
(b)
$$\begin{aligned}
7x + \frac{7x+7}{2} - 8 &= 5\left(\frac{1}{2} + \frac{7x}{3}\right) && \mid \text{ TU} \\
7x + \frac{7x+7}{2} - 8 &= \frac{5}{2} + \frac{35x}{3} && \mid \cdot 6 \\
42x + 21x + 21 - 48 &= 15 + 70x && \mid +27 - 70x \\
-7x &= 42 && \mid : (-7) \\
x &= \underline{\underline{-6}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sind drei Punkte P, Q und R.
Gesucht ist das Gebiet derjenigen Punkte, welche alle drei folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Sie liegen näher bei Q als bei P.
2. Ihre Distanz zu R ist kleiner als die Länge der Strecke $\overline{RQ}$.
3. Sie liegen näher bei der Geraden PQ als bei der Geraden PR.

Konstruiere den Rand dieses Gebietes und schraffiere es.



Aufgabe 4

Welches ist die kleinste natürliche Zahl, die durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 10 teilbar ist?

Variante 1:

Jede natürliche Zahl ist durch 1 teilbar.

Die Primfaktorzerlegung der Zahlen $2, \ldots, 10$ ist:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \\ 3 &= 3 \\ 4 &= 2 \cdot 2 \\ 5 &= \underline{5} \\ 6 &= 2 \cdot 3 \\ 7 &= \underline{7} \\ 8 &= \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} = \underline{2^3} \\ 9 &= \underline{3 \cdot 3} = \underline{3^2} \\ 10 &= 2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Unterstrichen wurde jeweils jene Primfaktoren, die im kgV auftreten müssen. Es gilt daher

$$\mathrm{kgV}(1, 2, \ldots, 10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2520}}$$

Variante 2:

Jede natürliche Zahl ist durch 1 teilbar.

Ist eine Zahl durch 8 teilbar, dann auch durch 4 und 2. (Die Zahlen 4 und 2 müssen nicht extra geprüft werden.)

Ist eine Zahl durch 9 teilbar, dann auch durch 3. (Die Zahl3 muss nicht extra geprüft werden.)

Ist eine Zahl durch 2 und 3 teilbar, dann auch durch 6. (Die Zahl 6 muss nicht extra geprüft werden.)

Ist eine Zahl durch 2 und 5 teilbar, dann auch durch 10. (Die Zahl 10 muss nicht extra geprüft werden.)

Die Frage reduziert sich also darauf, die kleinste Zahl zu suchen, die durch 5, 7, 8, 9 teilbar ist. Diese ist $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = \underline{\underline{2520}}$.

Variante 3:

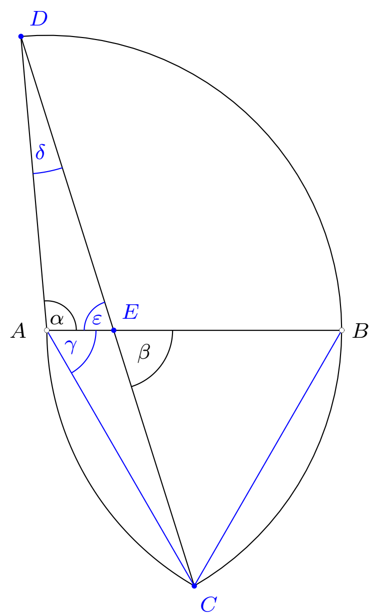
Mit dem Taschenrechner bestimmt man:

$$\begin{aligned} \mathrm{kgV}(\mathbf{1}, \mathbf{2}) &= 2 \\ \mathrm{kgV}(2, \mathbf{3}) &= 6 \\ \mathrm{kgV}(6, \mathbf{4}) &= 12 \\ \mathrm{kgV}(12, \mathbf{5}) &= 60 \\ \mathrm{kgV}(60, \mathbf{6}) &= 60 \\ \mathrm{kgV}(60, \mathbf{7}) &= 420 \\ \mathrm{kgV}(420, \mathbf{8}) &= 840 \\ \mathrm{kgV}(840, \mathbf{9}) &= 2520 \\ \mathrm{kgV}(2520, \mathbf{10}) &= \underline{\underline{2520}} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

In untenstehender Figur sind A und B die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen. Beide Kreisbögen haben den gleich grossen Radius $\overline{AB}$.

Der Winkel α misst $95°$. Berechne den Winkel β.



Es sind C, D und E Schnittpunkte von Kreisbögen und/oder Strecken, so wie oben bezeichnet.

Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Also ist $\gamma = 60°$.

Das Dreieck ACD ist gleichschenklig. Also ist $\delta = \dfrac{180° - (\alpha + \gamma)}{2} = 12.5°$

Mit der Winkelsumme im Dreieck ADE finden wir $\varepsilon = 180° - \alpha - \delta = 72.5°$

Schliesslich sind β und ε Scheitelwinkel, also ist $\beta = \varepsilon = \underline{\underline{72.5°}}$.

Aufgabe 6

Grossist Gubler handelt mit Mandeln und Erdnüssen. Die Mandeln haben einen Kilopreis von Fr. 18.50 und die Erdnüsse einen Kilopreis von Fr. 8.50

Gubler stellt aus solchen Mandeln und Erdnüssen eine Mischung her, die 16 kg wiegt und insgesamt Fr. 187.20 kostet.

Die Mischung enthält x Kilogramm Mandeln. Stelle eine Gleichung für x auf und löse sie.

$$\begin{aligned} x &= \text{Masse Mandeln in der Mischung (in kg)} \\ 16 - x &= \text{Masse Erdnüsse in der Mischung (in kg)} \\ 18.50 \cdot x &= \text{Preis der Mandeln in der Mischung} \\ 8.50 \cdot (16 - x) &= \text{Preis der Erdnüsse in der Mischung} \\ 18.50 \cdot x \quad + \quad 8.50 \cdot (16 - x) &= \text{Preis der Mischung} \end{aligned}$$

Damit erhält man die Gleichung

$$18.50 \cdot x \quad + \quad 8.50 \cdot (16 - x) = 187.20$$

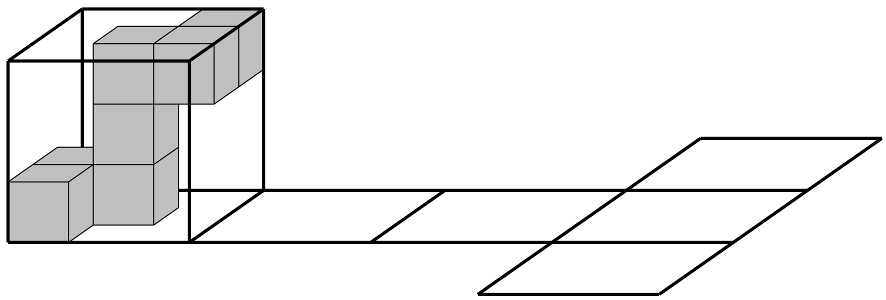
Diese Gleichung wird nun gelöst:

$$\begin{aligned} 18.50 \cdot x \quad + \quad 8.50 \cdot (16 - x) &= 187.20 \\ 18.50 \cdot x \quad + \quad 136 \quad - \quad 8.50 \cdot x &= 187.20 \\ 10 \cdot x \quad + \quad 136 &= 187.20 \\ 10 \cdot x &= 51.20 \\ x &= 5.12 \end{aligned}$$

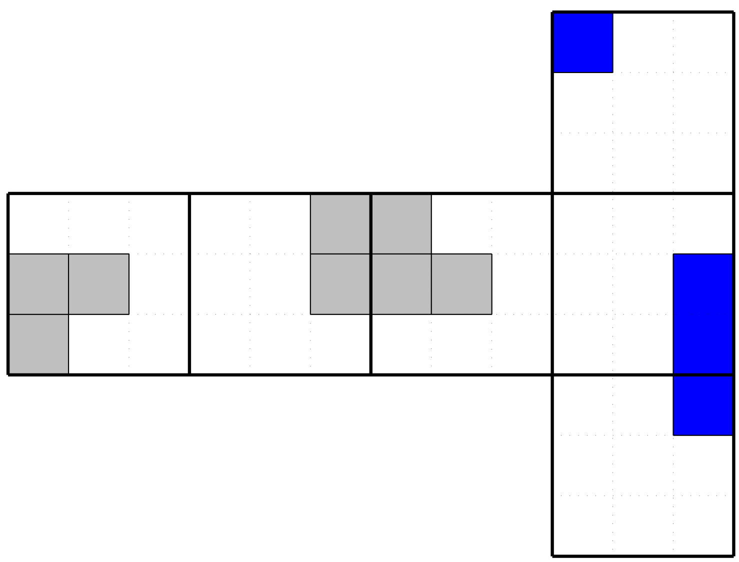
Es hat $\underline{\underline{5.12 \text{ kg}}}$ Mandeln in der Mischung.

Aufgabe 7

Der unten dargestellte Würfelkörper besteht aus 7 gleich grossen, grau eingefärbten Würfeln und ist fest mit einem grossen Würfel verbunden, der auf einer horizontalen Fläche steht.



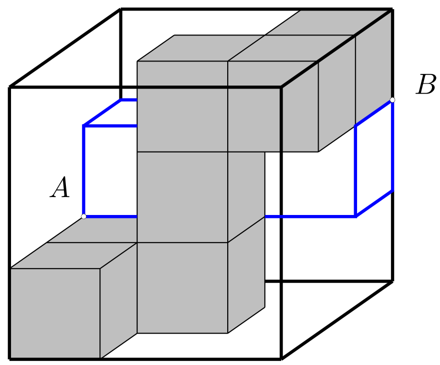
Der grosse Würfel wird nun 3 mal über seine Kanten nach rechts gekippt und von der so erreichten Position einmal nach vorne und einmal nach hinten. Dabei hinterlässt er auf der horizontalen Fläche das dargestellte Würfelnetz als Abdruck. Die nach aussen zeigenden Flächen des Würfelkörpers hinterlassen ebenfalls Abdrücke. Unten sind diese Abdrücke in den ersten drei Quadraten des Würfelnetzes skizziert. Vervollständige die Abdrücke in den drei leeren Quadraten in der unteren Figur (die punktierten Linien dienen dabei als Hilfslinien).



Aufgabe 8

Der unten dargestellte Würfelkörper besteht aus 7 gleich grossen Würfeln der Kantenlänge 7 cm. Die beiden Punkte A und B sind Ecken von je einem der 7 Würfel.

Berechne die Länge der Strecke $\overline{AB}$.



Die Strecke $\overline{AB}$ ist die Raumdiagonale des oben blau eingezeichneten Quaders mit den Kantenlängen

$$3 \cdot 7\,\text{cm} = 21\,\text{cm}, \; 7\,\text{cm} \text{ und } 7\,\text{cm}.$$

Es gilt deshalb

$$\overline{AB} = \sqrt{21^2 + 7^2 + 7^2} = \sqrt{539} = \underline{\underline{23.22\,\text{cm}}}$$

Aufgabe 9

Bauer Bolt bewirtschaftet einen Hof mit 24 Hektar Ackerland. Auf 60% dieser Fläche baut er Weizen an, auf 25% Mais und auf dem Rest pflanzt er Gerste. In einer Saison rechnet er mit folgenden Erträgen:

Weizen	Fr. 600 pro Hektar,
Mais	Fr. 1500 pro Hektar,
Gerste	Fr. 700 pro Hektar.

(a) Wieviel Prozent des gesamten Ertrages einer Saison kommt vom Gerstenverkauf?

(b) Am Ende der Saison stellt Bolt fest, dass er 11% weniger eingenommen hat als die geplanten Fr. 20'160, obwohl der Gerstenpreis um 7% gestiegen ist. Grund dafür ist ein Schädling, der einen Teil des Weizens befallen hat. Wieviel Prozent des ursprünglich angepflanzten Weizens wurden vom Schädling zerstört?

(a) Die geplanten Erträge sind die folgenden:

Ertrag aus Weizen:	$0.6 \cdot 24 \cdot 600$	=	8640 Fr.
Ertrag aus Mais:	$0.25 \cdot 24 \cdot 1500$	=	9000 Fr.
Ertrag aus Gerste:	$0.15 \cdot 24 \cdot 700$	=	2520 Fr.
Gesamtertrag		=	$\underline{20'160\,\text{Fr.}}$

Der Ertrag aus Gerste entspricht somit $\dfrac{2520\,\text{Fr.}}{20160\,\text{Fr.}} = 0.125 = \underline{\underline{12.5\%}}$ des Gesamtertrages.

(b) Die am Ende der Saison tatsächlich erzielten Erträge sind die folgenden:

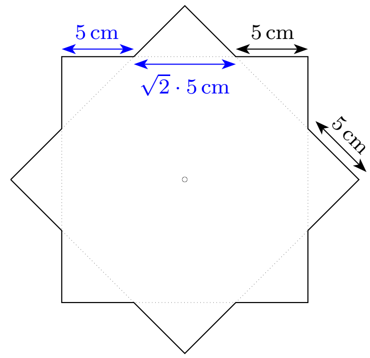
Gesamtertrag:	$0.89 \cdot 20160$ Fr.	=	17942.4 Fr.
Ertrag aus Mais:	unverändert	=	9000.0 Fr.
Ertrag aus Gerste:	$0.15 \cdot 24 \cdot (1.07 \cdot 700)$	=	2696.4 Fr.
Ertrag aus Weizen:		=	$\underline{6246.0\,\text{Fr.}}$

Der Ertrag aus Weizen entspricht $\dfrac{6246\,\text{Fr.}}{8640\,\text{Fr.}} = 0.7229 = 72.29\%$ des geplanten Ertrages.

Somit wurden $\underline{\underline{27.71\%}}$ des Weizens vom Schädling zerstört.

Aufgabe 10

Der unten dargestellte, regelmässige 8-zackige Stern entsteht, indem man zwei Quadrate übereinander legt und das eine Quadrat um 45° dreht. Die Länge aller Zackenseiten ist gleich 5 cm.



(a) Berechne die Länge einer Quadratseite.
(b) Berechne den Flächeninhalt des Sterns.

(a) Es sei s die gesuchte Quadratseite. Es gilt (siehe Skizze):

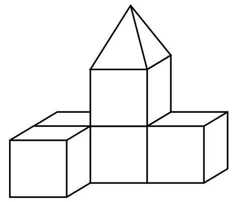
$$s = 5\,\text{cm} + \sqrt{2} \cdot 5\,\text{cm} + 5\,\text{cm} = \underline{\underline{17.07\,\text{cm}}}$$

(b) Die Fläche des Sterns ist gleich der Fläche eines Quadrates plus die Fläche von 4 Dreiecken:

$$A = s^2 + 4 \cdot \frac{5\,\text{cm} \cdot 5\,\text{cm}}{2} = \underline{\underline{341.42\,\text{cm}^2}}$$

Aufgabe 11

Aus fünf Würfeln der Kantenlänge 2 cm und einer quadratischen Pyramide der Höhe 2 cm und Grundkantenlänge 2 cm wird ein Gebäudemodell zusammengeklebt, siehe die folgende Figur.

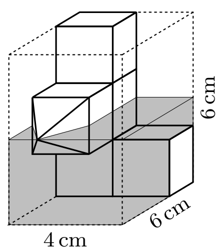


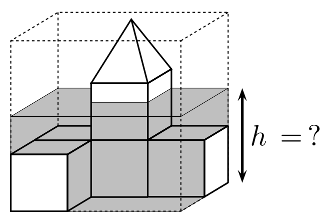
(a) Berechne das Volumen des Gebäudemodells.

$$V = 5 \cdot 2^3 + \tfrac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 \quad = \quad \tfrac{16}{3} \cdot 2^3 = \tfrac{128}{3} \approx 42.67.$$

Das Gebäudemodell hat ein Volumen von $\underline{\underline{42.67\,\mathrm{cm}^3}}$.

Das Gebäudemodell wird nun in einen Plexiglasquader der Abmessungen $4\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm} \times 6\,\mathrm{cm}$ eingeschlossen und dieser bis zur halben Höhe mit Wasser gefüllt, siehe untenstehende linke Figur. Danach wird der Plexiglasquader mit dem Modell so gekippt, dass die Spitze des Daches wieder nach oben zeigt, siehe untenstehende rechte Figur.





(b) Bestimme die Wasserhöhe h nach dem Kippen.

1. Bestimmung des Wasservolumens: (dies wird im linken Bild vorgenommen)

Das Wasser im untersten Drittel entspricht dem von 4 Würfeln, also $4 \cdot 2^3 = 32$.

Das Wasser im mittleren Drittel entspricht dem von vier halben Würfeln minus dem einer halben Pyramide, also $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^2 \cdot 2 = 16 - \frac{4}{3} = \frac{44}{3}$.

Das Wasservolumen beträgt also $V_{\text{Wasser}} = (32 + \frac{44}{3})\,\mathrm{cm}^3 \approx 46.67\,\mathrm{cm}^3$

2. Bestimmung der Wasserhöhe h im rechten Bild:

In das untere Drittel passen $2 \cdot 2^3\,\mathrm{cm}^3 = 16\,\mathrm{cm}^3$.

Das restliche Wasservolumen $46.67\,\mathrm{cm}^3 - 16\,\mathrm{cm}^3 = 30.67\,\mathrm{cm}^3$ sollte sich auf dem mittleren Drittel verteilen.

Dieses hat die Querschnittsfläche von fünf Würfeln, also $5 \cdot 2^2\,\mathrm{cm}^2 = 20\,\mathrm{cm}^2$.

Die Höhe x im mittleren Drittel ist daher $x = \frac{30.67}{20} \approx 1.53$.
Damit gilt $h = 2 + x = 2 + 1.53 = 3.53$.
Die Wasserhöhe ist $\underline{\underline{3.53\,\mathrm{cm}}}$.

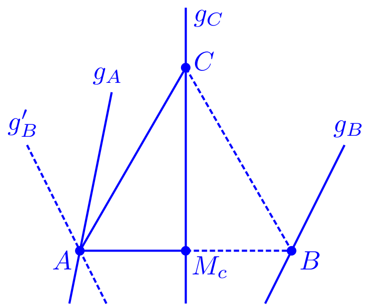
Aufgabe 12

Gegeben sind drei Geraden g_A, g_B und g_C.

Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC so, dass A auf g_A, B auf g_B und sowohl C als auch M_c auf g_C liegen (M_c ist der Mittelpunkt der Seite $c = \overline{AB}$).

Überlege Dir anhand einer Skizze, wie Du vorgehen willst. Schreibe einen Lösungsweg und führe die Konstruktion direkt auf diesem Blatt aus. Der Lösungsweg soll so formuliert werden, dass die entscheidende Idee zum Ausdruck kommt.

Skizze und Lösungsweg:



Die Gerade g_C ist Symmetrieachse des gleichseitigen Dreiecks ΔABC.

1. Konstruiere das Spiegelbild g'_B von g_B an der Geraden g_C.
2. Die Ecke A ist der Schnittpunkt von g_A und g'_B.
3. Die Ecke B ist das Spiegelbild von A an g_C.
4. Die Ecke C ist der Schnitt des Kreises mit Zentrum B und Radius AB. (Es gibt 2 Lösungen).

Konstruktion: