Mathematik
Aufnahmeprüfung 2014
Profile m,n,s

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Lösungen

Aufgabe 1

(a) Vereinfache (schreibe als einen Bruch): $2+\frac{a}{2}+\frac{3b}{7} = ?$

(b) Vereinfache so weit wie möglich: $\sqrt{(3r)^2+16r^2} = ?$

(c) Vereinfache so weit wie möglich: $\left(\frac{xy}{3}-y\right) : \frac{y}{3x} = ?$

(a) $$2+\frac{a}{2}+\frac{3b}{7} = \frac{28}{14}+\frac{7a}{14}+\frac{6b}{14} = \underline{\underline{\frac{28+7a+6b}{14}}}$$

(b) $$\sqrt{(3r)^2+16r^2} = \sqrt{9r^2+16r^2} = \sqrt{25r^2} = \underline{\underline{5r}}$$

(c) $$\left(\frac{xy}{3}-y\right) : \frac{y}{3x} = \frac{xy-3y}{3}\cdot\frac{3x}{y} = \frac{y(x-3)}{3}\cdot\frac{3x}{y} = \underline{\underline{(x-3)x}} \qquad (= \underline{\underline{x^2-3x}})$$

Aufgabe 2

Löse die Gleichung nach x auf. Gib das Resultat als ganze Zahl oder als gekürzten Bruch an.

(a) $$2[x-3(2-x)] = 5(x+1) - 3(x+1)$$

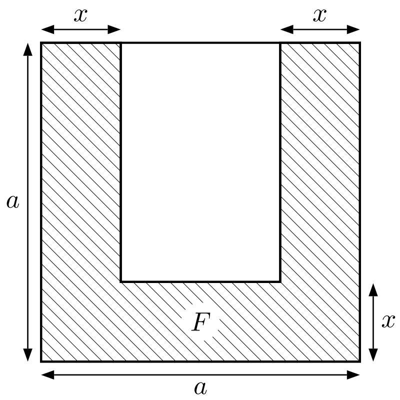
(b) $$\frac{61x}{27} + 10 \cdot \frac{x}{9} + \frac{x+1}{3} = 1$$

(a)
$$\begin{aligned}
2[x-3(2-x)] &= 5(x+1) - 3(x+1) \\
2[x-6+3x] &= 5x+5-3x-3 \\
2[4x-6] &= 2x+2 \\
8x-12 &= 2x+2 \\
6x &= 14 \\
3x &= 7 \\
\underline{\underline{x = \tfrac{7}{3}}}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\frac{61x}{27} + 10 \cdot \frac{x}{9} + \frac{x+1}{3} &= 1 \\
\frac{61x}{27} + \frac{10x}{9} + \frac{x+1}{3} &= 1 \\
\frac{61x}{27} + \frac{30x}{27} + \frac{9x+9}{27} &= 1 \\
61x + 30x + 9x + 9 &= 27 \\
100x &= 18 \\
x &= \tfrac{18}{100} \\
\underline{\underline{x = \tfrac{9}{50}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Aus einem Quadrat der Seitenlänge a wird die schraffierte Fläche F gemäss untenstehender Figur ausgeschnitten.

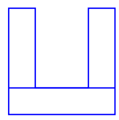


(a) Stelle eine Formel auf, mit der sich der Flächeninhalt von F aus a und x berechnen lässt.

(b) Sei nun $a = 12\,\text{cm}$. Bestimme x durch Probieren mit dem Taschenrechner (bis auf Millimeter genau) so, dass F möglichst genau den halben Flächeninhalt des ganzen Quadrates ausmacht.

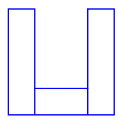
(a)

$$\begin{aligned} F &= ax + 2(a-x)x \\ &= ax + 2ax - 2x^2 \\ \underline{\underline{F}} &\underline{\underline{= 3ax - 2x^2}} \end{aligned}$$



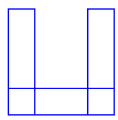
oder

$$\begin{aligned} F &= 2ax + (a-2x)x \\ &= 2ax + ax - 2x^2 \\ \underline{\underline{F}} &\underline{\underline{= 3ax - 2x^2}} \end{aligned}$$



oder

$$\begin{aligned} F &= 2(a-x)x + 2x^2 + (a-2x)x \\ &= 2ax - 2x^2 + 2x^2 + ax - 2x^2 \\ \underline{\underline{F}} &\underline{\underline{= 3ax - 2x^2}} \end{aligned}$$



(b) Das Quadrat hat Flächeninhalt $144\,\text{cm}^2$.
Anstatt in die Formel aus (a) einzusetzen kann man alternativ auch das verbleibende Rechteck R betrachten, denn auch dieses sollte dann die Hälfte des Flächeninhalts des Quadrats ausmachen, also $72\,\text{cm}^2$.
Für x gilt $0 \leq x \leq 6\,\text{cm}$, denn andere Werte machen keinen Sinn.
Setzt man die ganzzahligen Werte ein, so gilt (alle Angaben in cm bzw. in cm^2):

x	1	2	3	4	5
F	34	64	90	112	130
R	110	80	54	32	14

Die Werte lassen erkennen, dass das gesuchte x zwischen 2 und 3 liegen muss. Für $x = 2.5$ gilt $F = 77.5$.
Daher muss x zwischen 2 und 2.5 liegen. Für $x = 2.3$ erhält man $F = 72.22$.
Daher muss x zwischen 2 und 2.3 liegen. Für $x = 2.2$ erhält man $F = 69.52$.
Für $\underline{\underline{x = 2.3\,\text{cm}}}$ erhält man den besten Wert.

Aufgabe 4

Nach allgemeingültigen Regeln muss ein Fussballfeld zwischen 90 und 120 Meter lang sein. Das ist auch in Fantasiland so. Dort gibt es aber drei verschiedene Längenmasseinheiten: Ein Xoul entspricht 30 cm, eine Yecke ist gleich 84 cm und ein Zessi misst 105 cm. Die Länge eines Fussballfeldes in Fantasiland muss in allen drei Einheiten durch eine natürliche Zahl ausgedrückt werden können.

Wie lang (gemessen in Metern und Zentimetern) muss ein Fussballfeld in Fantasiland mindestens sein?

Die gesuchte Länge muss ein Vielfaches von 30, 84 und 105 cm sein. Wir berechnen zuerst das kleinste gemeinsame Vielfache der drei Zahlen:

$$\left.\begin{array}{rcl} 30 & = & 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 84 & = & 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \\ 105 & = & 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{kgV}(30, 84, 105) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{420}$$

Die gesuchte Länge muss somit ein ganzzahliges Vielfaches von 420 cm sein.

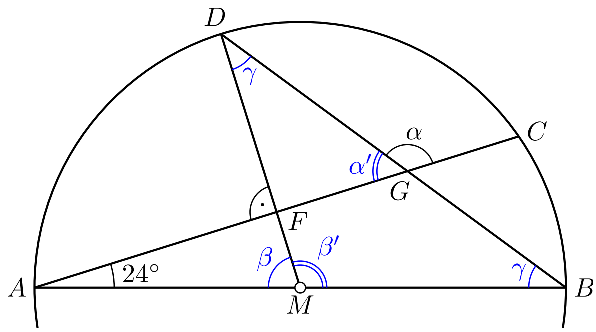
$9000 : 420 \approx 21.43$

Das kleinste ganzzahlige Vielfache von 420 cm, das grösser als 90 m ist, ist demnach

$22 \cdot 420 = 9240$ also $\underline{\underline{92\text{ m }40\text{ cm}}}$

Aufgabe 5

Bestimme den Winkel α in der folgenden Figur.



Es gilt $\beta = 180° - 90° - 24° = 66°$ (Winkelsumme im Dreieck AMF).

Daher ist $\beta' = 180° - \beta = 114°$ (Nebenwinkel von β).

Das Dreieck MBD ist gleichschenklig. Mithin ist $\gamma = \frac{180° - \beta'}{2} = 33°$.

Nun folgt $\alpha' = 180° - 90° - \gamma = 57°$ (Winkelsumme im Dreieck DFG)

Schliesslich gilt $\underline{\underline{\alpha = 123°}}$.

Aufgabe 6

Holzhändler Huber fährt mit 16 Tonnen Brennholz zum Brennholzmarkt. Es gibt Brennholz in zwei verschiedenen Qualitäten. Eine Tonne der besseren Qualität kostet Fr. 400.– und für eine Tonne der normalen Qualität bezahlt man Fr. 350.–.

Abends fährt Herr Huber mit 3.9 Tonnen nicht verkauftem Brennholz und Fr. 4500.– Einnahmen nach Hause. Es sei x die von Herr Huber verkaufte Menge Brennholz der besseren Qualität in Tonnen. Stelle eine Gleichung für x auf und löse sie.

Total verkauft Herr Huber $16\,\mathrm{t} - 3.9\,\mathrm{t} = 12.1\,\mathrm{t}$ Brennholz.

Das sind x Tonnen der besseren und $(12.1 - x)$ Tonnen der normalen Qualität.

Die Einnahmen aus dem Verkauf der besseren Qualität betragen $400 \cdot x$ Franken.
Die Einnahmen aus dem Verkauf der normalen Qualität betragen $350 \cdot (12.1 - x)$ Franken.

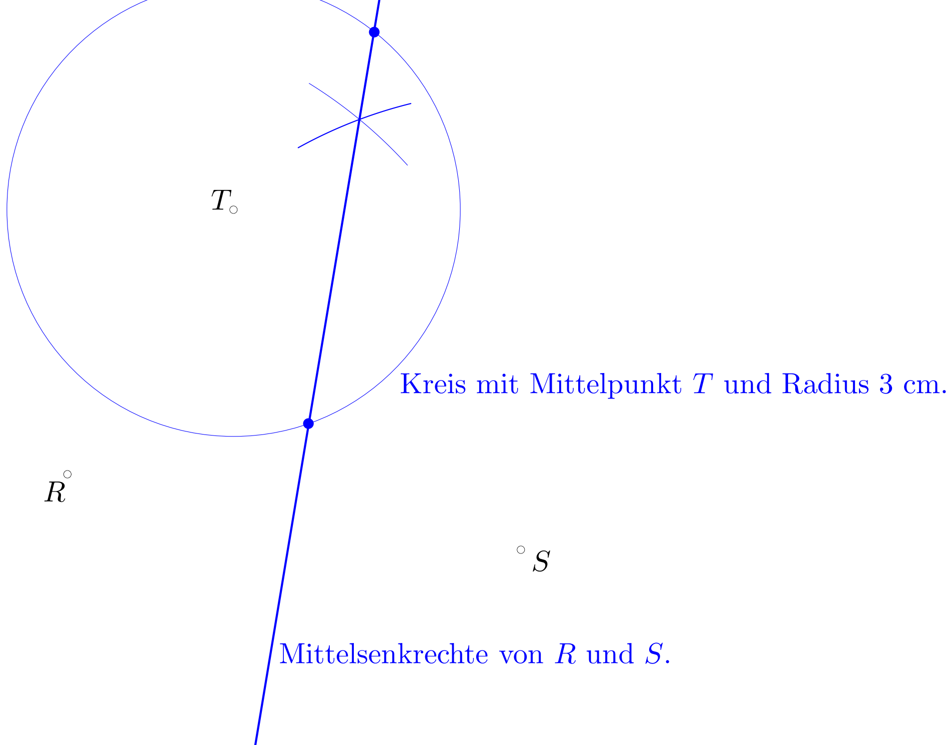
Die Summe dieser beiden Einnahmen muss das Total der Einnahmen von 4500 Franken ergeben:

$$\begin{aligned} 400x + 350 \cdot (12.1 - x) &= 4500 \\ 400x + 4235 - 350x &= 4500 \\ 50x &= 265 \\ x &= \underline{\underline{5.3}} \qquad \text{(Herr Huber verkauft 5.3 Tonnen der besseren Qualität.)} \end{aligned}$$

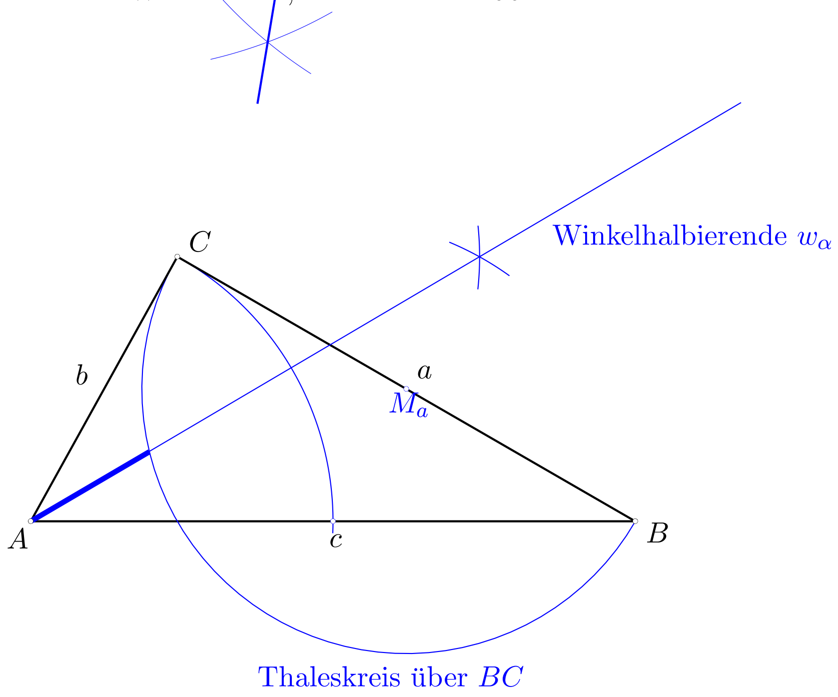
Aufgabe 7

Bei den folgenden zwei Konstruktionsaufgaben ist **kein** Lösungsweg verlangt. Lasse aber alle benötigten Hilfslinien stehen, so dass man sieht, wie die Lösung zustande kam!

(a) Gegeben sind die drei Punkte R, S und T. Konstruiere *alle* Punkte, welche von T den Abstand 3 cm haben und gleich weit von den Punkten R und S entfernt sind.



(b) Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seiten a, b und c. Markiere *alle* Punkte P im Innern des Dreiecks ABC, die gleich weit von den Seiten b und c entfernt sind, und von denen aus man die Punkte B und C unter einem Winkel sieht, der kleiner als 90° ist.



Aufgabe 8

Ein Verkäufer von Skateboards setzt diese aus den Einzelteilen Brett, Rädersatz und Zubehör zusammen. Bisher hat er diese Teile zu folgenden Preisen eingekauft: das Brett für Fr. 42.–, den Rädersatz für Fr. 9.20 und das Zubehör für Fr. 21.–.
Sein Gewinn entspricht 39.2% des Verkaufspreises.
Nun wechselt er seinen Zulieferer. Dadurch muss er für das Brett 15% weniger ausgeben, den Rädersatz erhält er neu für Fr. 7.20 und für das Zubehör muss er 15% mehr bezahlen. Den Verkaufspreis lässt er unverändert.
Wie gross ist nun der Gewinn des Verkäufers in Prozenten des Verkaufspreises?

Die Einzelpreise ergeben die Kosten von 72.20 Fr. für ein Skateboard.

Dies ist $100\% - 39.2\% = 60.8\%$ des Verkauspreises.

Also wird das Skateboard zu einem Preis von $\dfrac{72.20\,\text{Fr.}}{0.608} = 118.75\,\text{Fr.}$ verkauft.

Nach dem Wechsel des Zulieferers kostet das Brett $42\,\text{Fr.} \cdot 0.85 = 35.70\,\text{Fr.}$, der Rädersatz $7.20\,\text{Fr.}$ und das Zubehör $21\,\text{Fr.} \cdot 1.15 = 24.15\,\text{Fr.}$

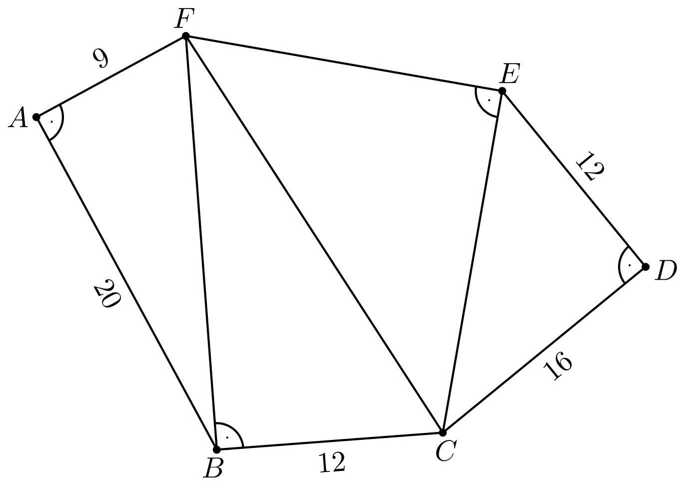
Die Teile des Skateboards kosten den Verkäufer also $67.05\,\text{Fr.}$

Sein Gewinn ist neu also $118.75\,\text{Fr.} - 67.05\,\text{Fr.} = 51.70\,\text{Fr.}$

Dieser macht also $\frac{51.70\,\text{Fr.}}{118.75\,\text{Fr.}} \approx \underline{\underline{0.4354 = 43.54\%}}$ des Verkaufspreises aus.

Aufgabe 9

Das Sechseck $ABCDEF$ ist aus vier rechtwinkligen Dreiecken aufgebaut, so wie es die untenstehende Figur zeigt. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Sechsecks aus den Angaben der Figur.



$BF^2 = 9^2 + 20^2 = 481$	$BF = \sqrt{481} \approx 21.93$
$CF^2 = 12^2 + BF^2 = 144 + 481 = 625$	$CF = 25$
$CE^2 = 12^2 + 16^2 = 400$	$CE = 20$
$EF^2 = CF^2 - CE^2 = 225$	$EF = 15$

Der Umfang des Sechsecks ist damit $U = 20 + 12 + 16 + 12 + 15 + 9 = \underline{\underline{84}}$.

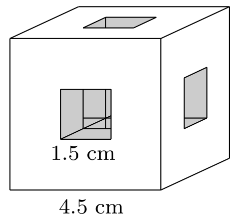
Die Fläche des Sechsecks ist der Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{ABCDEF} &= \mathrm{F}_{ABF} + \mathrm{F}_{BCF} + \mathrm{F}_{CEF} + \mathrm{F}_{CDE} \\ &= \frac{9 \cdot 20}{2} + \frac{12 \cdot BF}{2} + \frac{20 \cdot 15}{2} + \frac{16 \cdot 12}{2} = \underline{\underline{467.59}} \end{aligned}$$

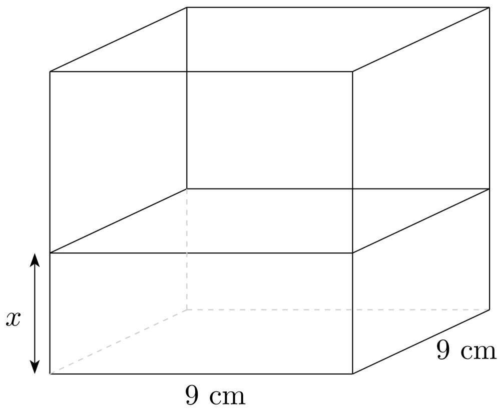
(Wenn zuvor bei $BF = 21.93$ gerundet wurde, erhält man $F_{ABCDEF} = 467.58$.)

Aufgabe 10

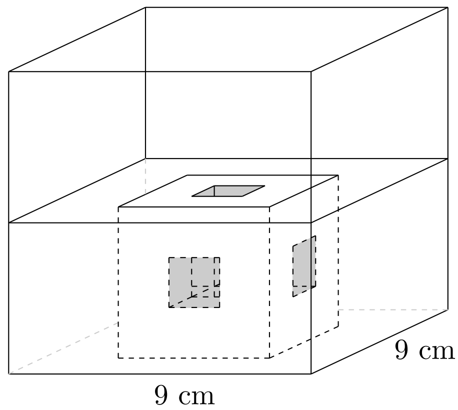
Einem Eisenwürfel mit Kantenlänge 4.5 cm werden drei Löcher ausgesägt. Die Löcher haben einen quadratischen Querschnitt mit Seitenlänge 1.5 cm und durchstossen den ganzen Würfel so, dass man hindurchschauen kann:



Der Eisenkörper wird nun in ein würfelförmiges Wasserbecken mit Kantenlänge 9 cm gelegt. Wie hoch muss der ursprüngliche Wasserstand x im Becken sein, damit nach dem Hineinlegen des Eisenkörpers die Wasseroberfläche genau gleich hoch steht wie die Deckfläche des Eisenkörpers?



Wasserbecken vor dem Hineinlegen des Eisenkörpers



Wasserbecken nach dem Hineinlegen des Eisenkörpers

Das Volumen des Eisenkörpers lässt sich auf verschiedene Arten berechnen:

$$
\begin{aligned}
V_{\text{Würfel}} - 7 \cdot V_{\text{Würfelchen}} &= 4.5^3 - 7 \cdot 1.5^3 &&= 91.125 - 23.625 &&= \underline{67.5\,\text{cm}^3} \\
V_{\text{Würfel}} - V_{\text{Quader}} - 4 \cdot V_{\text{Würfelchen}} &= 4.5^3 - 1.5^2 \cdot 4.5 - 4 \cdot 1.5^3 &&= 91.125 - 10.125 - 13.5 &&= \underline{67.5\,\text{cm}^3} \\
4 \cdot V_{\text{Quader}} + 8 \cdot V_{\text{Würfelchen}} &= 4 \cdot 1.5^2 \cdot 4.5 + 8 \cdot 1.5^3 &&= 40.5 + 27 &&= \underline{67.5\,\text{cm}^3}
\end{aligned}
$$

Das Volumen des Wassers ist gleich $9 \cdot 9 \cdot x$ cm^3 (linke Figur).

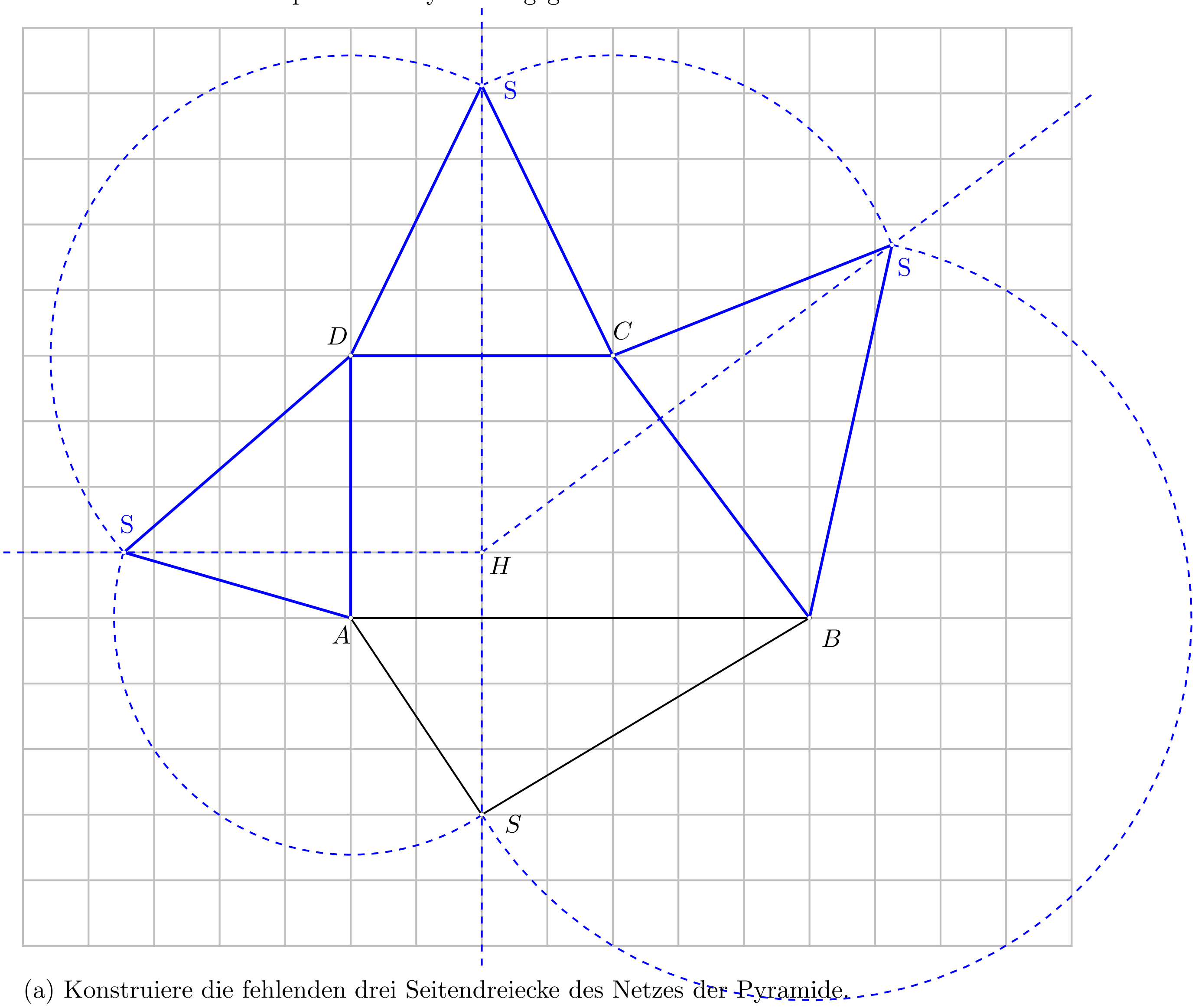
Das Volumen von Wasser und Eisenkörper zusammen ist gleich $9 \cdot 9 \cdot 4.5$ cm^3 (rechte Figur).

Das liefert folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
67.5 + 9 \cdot 9 \cdot x &= 9 \cdot 9 \cdot 4.5 \\
81x &= 297 \\
x &\approx \underline{3.67\,\text{cm}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11

Von der 4-seitigen Pyramide $ABCDS$ ist ein Teil des Netzes gegeben. Das Trapez $ABCD$ ist die Grundfläche der Pyramide und das Dreieck ABS ist eine Seitenfläche der Pyramide. Ausserdem ist mit H der Höhenfusspunkt der Pyramide gegeben.



(a) Konstruiere die fehlenden drei Seitendreiecke des Netzes der Pyramide.

(b) Berechne das Volumen der Pyramide. Benutze dazu die Tatsache, dass die gegebenen Punkte A, B, C, D, H und S auf Schnittpunkten der Gitternetzlinien liegen, und eine Häuschenbreite 1 cm misst.

Höhe der Pyramide $= \sqrt{3^2 - 1^2} \approx 2.83\,\text{cm}$

Inhalt der Grundfläche (Trapez) $= 5.5 \cdot 4 = 22\,\text{cm}^2$

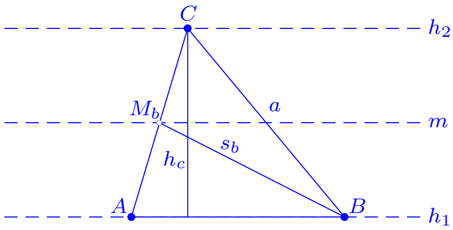
$V = \frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 22 \cdot 2.83 = \underline{\underline{20.75\,\text{cm}^3}}$

Aufgabe 12

Konstruiere ein Dreieck ABC aus folgenden Angaben:
Seite $a = 6.5$ cm, Höhe $h_c = 5$ cm und Schwerlinie $s_b = 5.5$ cm

Überlege Dir anhand einer Skizze, wie Du vorgehen willst. Schreibe einen Lösungsweg und führe die Konstruktion direkt auf diesem Blatt aus. Der Lösungsweg soll so formuliert werden, dass die entscheidende Idee zum Ausdruck kommt, und die ausgeführte Konstruktion Schritt für Schritt nachvollziehbar ist.

Skizze:



Lösungsweg:

1. Zwei parallele Geraden h_1 und h_2 im Abstand $h_c = 5$ cm (sog. *Höhenstreifen*).
2. Die Ecke B auf h_1 wählen.
3. Die Ecke C ist der Schnittpunkt von h_2 mit dem Kreis um B mit Radius $a = 6.5$ cm.
4. Die Gerade m ist die Mittelparallele von h_1 und h_2.
5. Der Seitenmittelpunkt M_b ist der Schnittpunkt von m und dem Kreis um B mit Radius $s_b = 5.5$ cm ($\rightarrow$ hier gibt es 2 Lösungen. Verlangt ist aber nur eine.)
6. Die Ecke A ist der Schnittpunkt von h_1 und der Gerade durch C und M_b.

Konstruktion:

$a = 6.5$ cm

$h_c = 5$ cm

$s_b = 5.5$ cm