Mathematik
Aufnahmeprüfung 2013
Profile m,n,s

KANTONSSCHULE SCHAFFHAUSEN

Lösungen (der Prüfung für die Schülerinnen und Schüler aus der **3.** Sekundarschule)

Lösung der Aufgabe 1

$$58 = 5 + 53 = 11 + 47 = 17 + 41 = 29 + 29$$

Lösung der Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
\frac{3b+8ab}{4b^2} - \frac{9a-1}{3b} - 1 &= \frac{b(3+8a)}{4b^2} - \frac{9a-1}{3b} - 1 \\
&= \frac{3+8a}{4b} - \frac{9a-1}{3b} - 1 \\
&= \frac{3(3+8a)}{12b} - \frac{4(9a-1)}{12b} - \frac{12b}{12b} \\
&= \frac{9+24a-36a+4-12b}{12b} = \underline{\underline{\frac{13-12a-12b}{12b}}}
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\frac{3b+8ab}{4b^2} - \frac{9a-1}{3b} - 1 &= \frac{3(3b+8ab)}{12b^2} - \frac{4b(9a-1)}{12b^2} - \frac{12b^2}{12b^2} \\
&= \frac{9b+24ab-(36ab-4b)-12b^2}{12b^2} \\
&= \frac{9b+24ab-36ab+4b-12b^2}{12b^2} \\
&= \frac{13b-12ab-12b^2}{12b^2} = \frac{b(13-12a-12b)}{12b^2} = \underline{\underline{\frac{13-12a-12b}{12b}}}
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}
3[2x-1-(1-x)] &= 4x-2(2x+3) \\
3[3x-2] &= -6 \\
9x-6 &= -6 \\
9x &= 0 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 0}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
1-2x &= \tfrac{1}{6} - \tfrac{3}{4}\cdot x - \tfrac{2}{3}\cdot x \quad \big|\cdot 12 \\
12-24x &= 2-9x-8x \\
10 &= 7x \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= \tfrac{10}{7}}}
\end{aligned}$$

Lösung der Aufgabe 4

Der Wert einer Marke ist der grösste gemeinsame Teiler von 1350, 2520 und 1170.

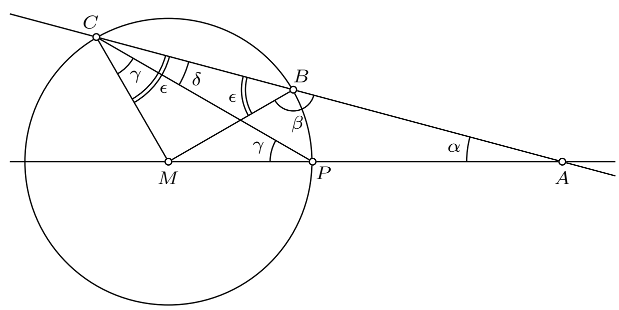
$$\left.\begin{array}{rcl} 1350 & = & 2\cdot 3^3\cdot 5^2 \\ 2520 & = & 2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7 \\ 1170 & = & 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 13 \end{array}\right\}\quad \text{ggT} \;=\; 2\cdot 3^2\cdot 5 \;=\; 90$$

Eine Marke kostet $\underline{\underline{\text{90 Rp.}}}$

$$\begin{array}{lrl} \text{Anzahl benötigte Marken für das Menu} & A\text{:} & 1350 \div 90 = \underline{\underline{15}} \\ & B\text{:} & 2520 \div 90 = \underline{\underline{28}} \\ & C\text{:} & 1170 \div 90 = \underline{\underline{13}} \end{array}$$

Lösung der Aufgabe 5

Das Dreieck BMC ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\epsilon = 180° - \beta = 50°$.
Das Dreieck PMC ist gleichschenklig mit dem Basiswinkel $\gamma = 36°$.
Folglich ist $\delta = \epsilon - \gamma = 50° - 36° = 14°$.



Im Dreieck APC misst der Winkel $\measuredangle APC = 180° - \gamma = 144°$. Also ist

$$180° \;=\; 144° + \delta + \alpha \;=\; 144° + 14° + \alpha \;=\; 158° + \alpha$$

und somit $\underline{\underline{\alpha = 22°}}$.

Lösung der Aufgabe 6

Sei x die Anzahl der 6er Reihen am Nachmittag. Die Anzahl der Soldaten am Vormittag ist gleich der Anzahl Soldaten am Nachmittag:

$$6x + 3 \;=\; 4(x+6) + 3 \qquad \text{oder} \qquad 6x + 3 \;=\; 4(x+7) - 1$$

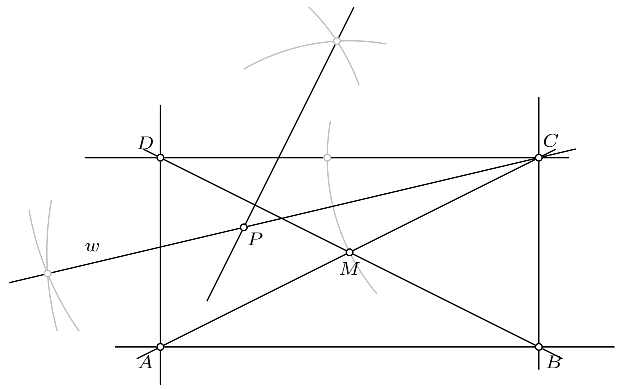
Die Berechnung von x:

$$\begin{array}{rcl} 6x + 3 & = & 4x + 27 \\ 2x & = & 24 \\ x & = & 12 \end{array}$$

Es waren $\underline{\underline{12}}$ Sechserreihen. Die Kompanie besteht aus $6 \cdot 12 + 3 = \underline{\underline{75}}$ Soldaten.

Lösung der Aufgabe 7

Der gesuchte Punkt P liegt auf der Winkelhalbierenden w von CD, CA. Der gesuchte Punkt P der Schnittpunkt von w und der Mittelsenkrechten von DM



Lösung der Aufgabe 8

Bis zum Haus braucht der Hund $\dfrac{100\text{ m}}{10\text{ m/s}} = 10\text{ s}$.

In dieser Zeit nähert sich Fink dem Haus bis auf eine Distanz von $100\text{ m} - 3.6\text{ m/s} \cdot 10\text{ s} = 64\text{ m}$.

Die beiden treffen sich nach weiteren $\dfrac{64\text{ m}}{10\text{ m/s} + 3.6\text{ m/s}} \approx 4.706\text{ s}$

in ein der Distanz von $\approx 4.706\text{ s} \cdot 10\text{ m/s} \approx \underline{\underline{47.1\text{ m}}}$ vor dem Haus.

oder: Sei x die gesuchte Distanz zum Haus in m. Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{100-x}{3.6} &= \frac{100+x}{10} \\
1000-10x &= 360+3.6x \\
13.6x &= 640 \\
x &= 47.06
\end{aligned}$$

Sie treffen sich $\underline{\underline{47.1\text{ m}}}$ vor dem Haus.

Lösung der Aufgabe 9

(a) Der Flächeninhalt des Sechsecks entspricht der Fläche a^2 des Quadrats ohne die beiden gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecke. Die Längen der Katheten dieser Dreiecke ist $(a-x)$. Die Summe der beiden Dreicksinhalte ist folglich $(a-x)^2$. Also lautet der Flächeninhalt des Sechsecks $ABCDEF$:

$$F = \underline{\underline{a^2 - (a-x)^2}} = 2ax - x^2 = x(2a-x)$$

Falls das Sechseck zusammengesetzt aus den beiden Dreiecken ABC, DEF und dem Rechteck $ACDF$ betrachtet wird:

$$F = \underline{\underline{x^2 + \sqrt{2} \cdot (a-x) \cdot \sqrt{2} \cdot x}} = x^2 + 2x(a-x) = 2ax - x^2 = x(2a-x)$$

(b) $\underline{\underline{x = 3.5\text{ cm}}}$

[Die zweite Zahl $\underline{\underline{x = 20.5\text{ cm}}}$, welche auch die Bedingung $x(24-x) = 72$ erfüllt, wird als richtige Lösung gewertet].

Lösung der Aufgabe 10

Das Wasservolumen V in der Situation von Figur 1: $V = 2 \cdot (6 \cdot 18 \cdot 9) + 6^3 = 2160$
Das Wasservolumen V in der Situation von Figur 2 (wobei x die Wasserhöhe über den untersten beiden Würfel bezeichnet):

$$V = (18^2 \cdot 6 - 2 \cdot 6^3) + (18^2 - 6^2) \cdot x \; = \; 1512 + 288x$$

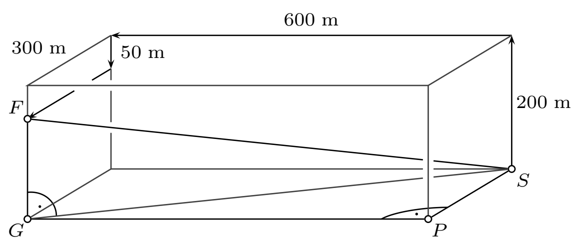
Also ist

$$\begin{aligned} 2160 &= 1512 + 288x \\ 648 &= 288x \\ x &= \frac{9}{4} = 2.25 \end{aligned}$$

Der Pegelstand beträgt 6 cm + 2.25 cm = $\underline{\underline{8.25 \text{ cm}}}$

Lösung der Aufgabe 11

(a)



(b) Im rechtwinkligen Dreieck SPG mit den Kathetenlängen 600 m und 300 m gilt für die Hypotenuse

$$SG^2 \; = \; 300^2 \text{ m}^2 + 600^2 \text{ m}^2 \; = \; 450000 \text{ m}^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck SGF hat die Kathete FG die Länge $FG = 200 \text{ m} - 50 \text{ m} = 150$ m. Nach dem Satz von Pythagoras ist

$$FS^2 \; = \; SG^2 + FG^2 \; = \; 450000 \text{ m}^2 + 150^2 \text{ m}^2 \; = \; 450000 \text{ m}^2 + 22500 \text{ m}^2 \; = \; 472500 \text{ m}^2$$

Die Länge des kürzesten Wegs von F nach S misst demnach $\sqrt{472500}$ m $= 687.39$ m $\approx \underline{\underline{687 \text{ m}}}$

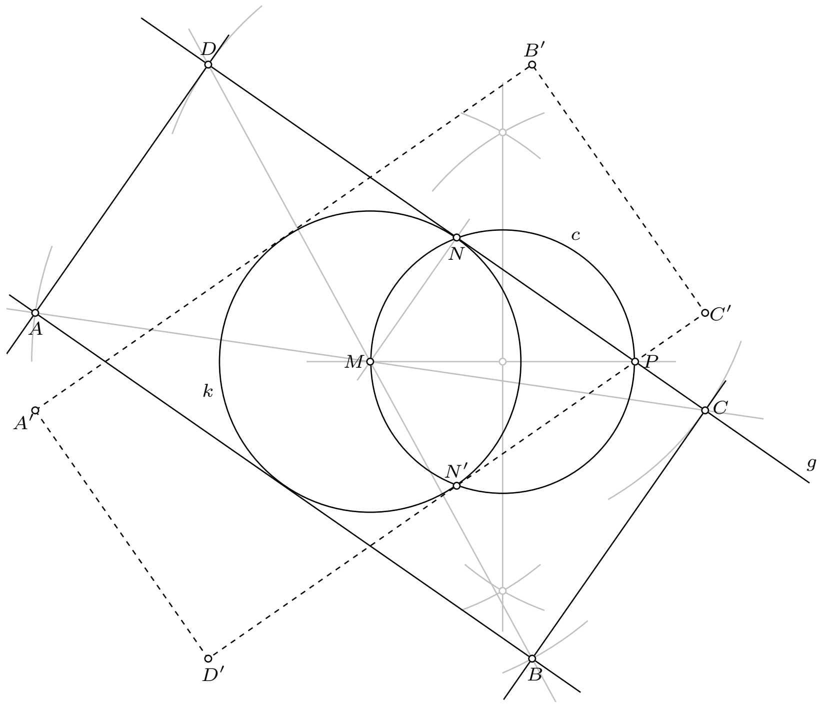
Lösung der Aufgabe 12

Konstruktionsbericht:

Die Mitte N der Seite CD bildet mit M und P ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse MP, und der Kathete MN der Länge 2 cm.

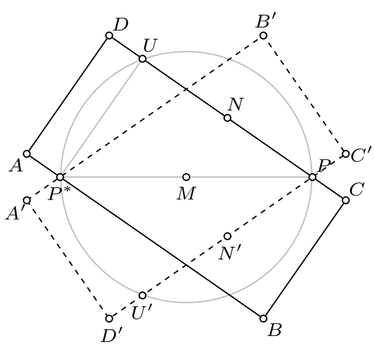
1. N ist der Schnittpunkt des Thaleskreises über MP und dem Kreis k um M mit Radius 2 cm.
2. Die Rechtecksseite CD ist die Senkrechte g zu MN durch N. N ist die Mitte von CD.
3. Die Ecken C, D sind die Schnittpunkte von g mit dem Kreis um N mit Radius 4 cm.
4. Die Ecken A, B sind die an M gespiegelten Punkte C, D.

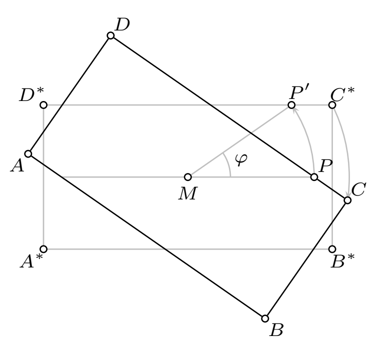
Konstruktion:



Weitere Konstruktionsvarianten:

(i) 1. Den Punkt P an M nach P^* spiegeln.
2. Das rechtwinklige Dreieck PP^*U mit der Hypotenuse PP^* und der Kathetenlänge $P^*U = 4$ cm.
3. Die Gerade PU ist die Seitengerade CD des gesuchten Rechtecks. Die Mitte N von PU ist auch die Mitte von CD.





(ii) 1. Irgend ein Rechteck $A^*B^*C^*D^*$ mit den Seitenlängen $A^*B^* = 8$ cm und $B^*C^* = 4$ cm, dessen Mittelpunkt M ist.
2. Dieses Rechteck mittels einer Drehung in die gesuchte Lage drehen.