KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

Mathematik | **Aufnahmeprüfung 2007**
1. Klasse
1. Teil | Ausbildungsprofile M, N, S

Hinweis

An der Prüfung waren nur die *Endresultate* gefragt. Im Hinblick auf den Lernprozess halten wir es aber für sinnvoll, hier auch die *Lösungswege* mit ihren zugrunde liegenden *Überlegungen* und *detaillierten Rechnungen* zu präsentieren. Wir hoffen, dass diese Form der Lösungen bei der Vorbereitung auf die nächste Aufnahmeprüfung hilfreich ist.

Lösungen

1. Wir lösen die Gleichung Schritt für Schritt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}+\frac{5}{12} &= \frac{1}{6}-x && \mid \cdot \text{ kgV der Nenner, d.h. } \cdot 12\\
3+5 &= 2-12x && \mid -2\\
6 &= -12x && \mid :(-12)\\
x &= -\frac{6}{12} && \mid \text{Kürzen mit 6}\\
x &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2. Wir setzen die vorgeschlagenen Zahlen der Reihe nach in die linke Seite der Ungleichung ein und vergleichen das Ergebnis mit der rechten Seite der Ungleichung:

x	$\left(\frac{x-2}{x}\right)^2$	$\leq \frac{1}{4}$
0	nicht definiert	nein
1	1	nein
2	0	ja
3	$1/9 = 0.\overline{1}$	ja
4	$1/4 = 0.25$	ja
5	$9/25 = 0.36$	nein

$\Rightarrow$ Die Ungleichung ist für $x = 2, 3$ und 4 erfüllt.

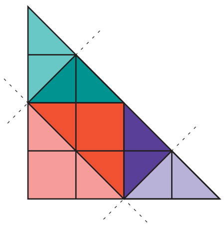
3. Wir stehen auf der Insel und starten unsere Stoppuhr in dem Augenblick, in dem wir von allen drei Leuchttürmen bestrahlt werden.
   - Das Licht des *ersten* Leuchtturms trifft uns wieder nach 15 s, 30 s, 45 s, usw. Das sind alles *ganze Vielfache* von 15.
   - Das Licht des *zweiten* Leuchtturms trifft uns wieder nach 9 s, 18 s, 27 s, usw. Das sind alles *ganze Vielfache* von 9.
   - Das Licht des *dritten* Leuchtturms trifft uns wieder nach 12 s, 24 s, 36 s, usw. Das sind alles *ganze Vielfache* von 12.

   Gleichzeitig von allen Leuchttürmen beschienen werden wir nach einem *gemeinsamen Vielfachen* von 15 s, 9 s und 12 s.
   Das *erste* Mal gleichzeitig von allen Leuchttürmen beschienen werden wir nach dem *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* von 15 s, 9 s und 12 s. Wir berechnen also das kgV:

$$\left.\begin{aligned} 15 &= 3 \cdot 5 \\ 9 &= 3 \cdot 3 \\ 12 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{kgV} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180\,.$$

   Damit werden wir in Abständen von 180 s von allen drei Leuchttürmen gleichzeitig beschienen.

4. Wir können das grau dargestellte Flächenstück in drei Dreiecke zerlegen (in der Figur mit dunklen Farben markiert). Diese Dreieck können auf die weissen Flächen umgeklappt werden (in der Figur mit hellen Farben markiert)

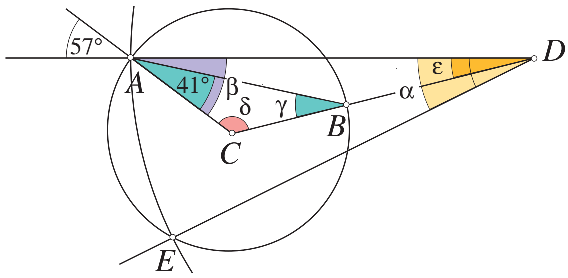


   Damit ist der Flächeninhalt des dunklen Flächenstücks genau halb so gross wie der Inhalt des gesamten Flächenstücks.

   Dasselbe Ergebnis erhalten wir, wenn wir die kleinen Dreiecke *auszählen*.

KANTONSSCHULE
SCHAFFHAUSEN

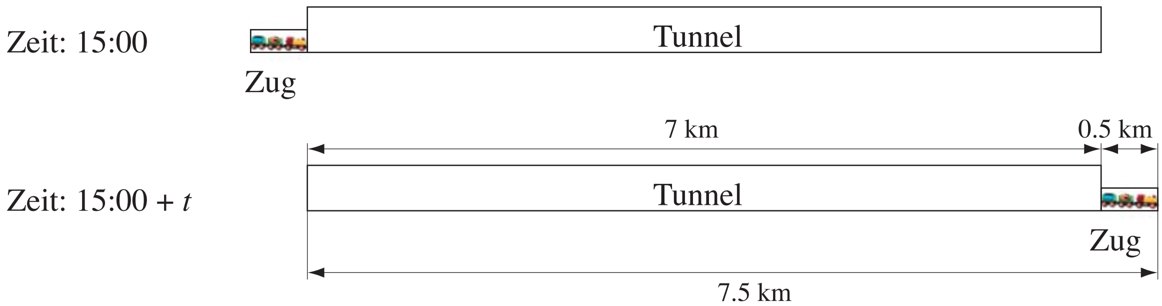
5. Wir beschriften zuerst (fast) alle Winkel in der Zeichnung:



Die Berechnungen beginnen wir im Punkt A, denn dort liegen die beiden gegebenen Winkel an. Dann arbeiten wir uns Schritt für Schritt zum Punkt D vor:

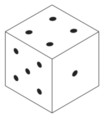
- Aus dem 57°-Winkel schliessen wir, dass auch sein Scheitelwinkel β 57° misst.
- Aus dem 41°-Winkel schliessen wir, dass auch der Winkel γ 41° misst, denn das Dreieck ABC ist gleichschenklig und hat daher gleiche Basiswinkel.
- Nun können wir im Dreieck ABC auch den dritten Winkel δ berechnen, denn die Winkelsumme im Dreieck beträgt stets 180°. Also gilt $\delta = 180° - 2\gamma = 180° - 2 \cdot 41° = 98°$.
- Nun können wir auch im Dreieck ADC den dritten Winkel ε berechnen. Mit der Formel für die Winkelsumme: $\varepsilon = 180° - \beta - \delta = 180° - 57° - 98° = 25°$.
- Schliesslich bemerken wir, dass CD den Winkel α halbiert. Die Dreiecke ACD und ECD sind nämlich deckungsgleich (kongruent), da sie in den drei Seiten übereinstimmen. Deshalb stimmen auch ihre Winkel überein. Also gilt $\alpha = 2 \cdot 25° = 50°$.

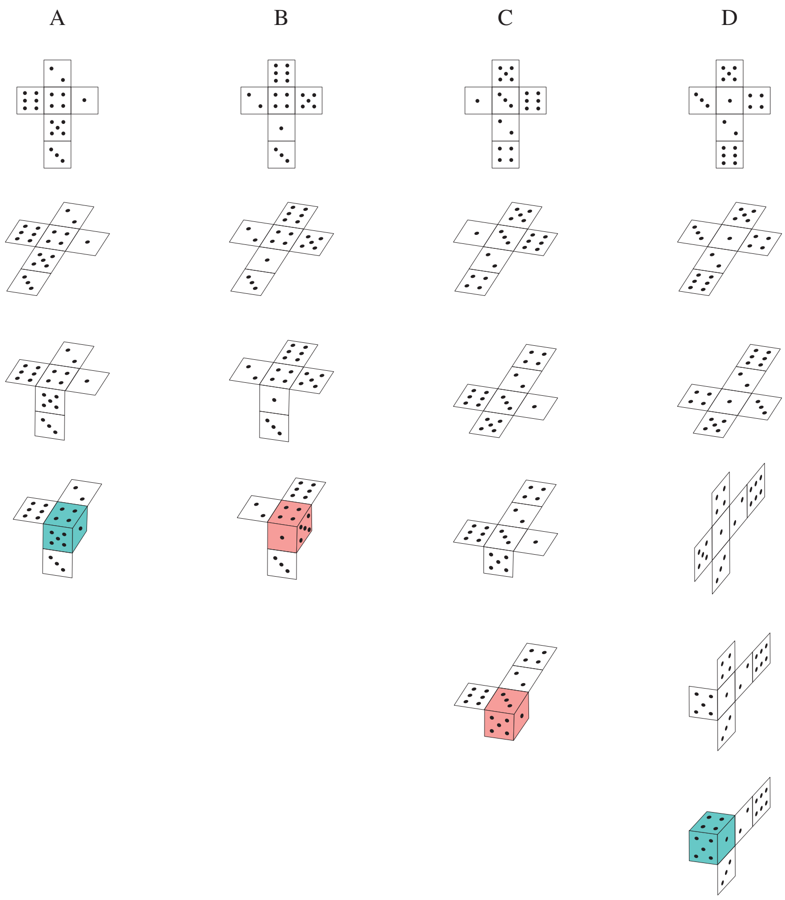
6. Der Zug braucht von der Einfahrt der Spitze in den Tunnel bis zur Ausfahrt des letzten Wagens eine unbekannte Zeitspanne. Wir geben ihr den Namen t und messen sie in Minuten.
In dieser Zeitspanne legt die Spitze des Zuges $7 \text{ km} + 0.5 \text{ km} = 7.5 \text{ km}$ zurück, wie aus der Zeichnung ersichtlich wird:



Der Zug fährt mit 60 km/h. Er legt damit pro Minute einen Kilometer zurück.
Damit braucht der Zug für die 7.5 km Distanz 7.5 min Zeit. Der letzte Wagen verlässt damit um 15:07:30 den Tunnel.

7. Wir versuchen jedes Netz so zu drehen und zusammenzufalten, bis es mit den drei sichtbaren Seitenflächen des Würfels übereinstimmt:





Übereinstimmende Anordnungen sind grün gezeichnet, nicht übereinstimmende rot. Die Netze A und D passen also zum Würfel.

8. Zu Beginn seien x Bakterien vorhanden. Der Wert von x spielt keine Rolle.
Die Bakterienkultur verdoppelt sich nun jede halbe Stunde. Damit erhalten wir folgende Tabelle:

Zeit in halben Stunden	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Bakterien	$2x$	$4x$	$8x$	$16x$	$32x$	$64x$	$128x$	$256x$	$512x$

Nach 9 halben Stunden wir die 500fache Anfangsmenge erstmals überschritten. Es sind also nach 4.5 Stunden erstmals mehr als 500mal so viele Bakterien vorhanden wie am Anfang.

9. Wir bezeichnen das heutige Alter von Tusnelda mit x und stellen alle Informationen in einer Tabelle zusammen:

	Alter von Tusnelda	Alter von Kunigunde
heute	x	$6x$
in 8 Jahren	$x+8$	$6x+8$ und $4(x+8)$

Für das Alter von Kunigunde in 8 Jahren haben wir zwei Angaben:

- Einerseits ist sie 8 Jahre älter als heute, also $6x+8$
- und andererseits 4mal so alt wie Kunigunde, also $4(x+8)$.

Setzen wir die beiden Terme für das Alter von Kunigunde einander gleich, so erhalten wir die Gleichung

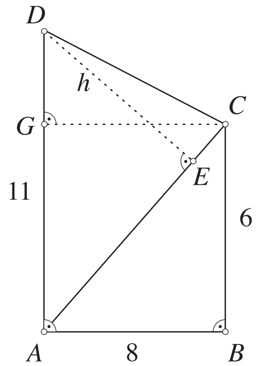
$$6x+8=4(x+8).$$

Diese Gleichung können wir nun lösen:

$$\begin{aligned} 6x+8&=4(x+8) && |\text{Ausmultiplizieren}\\ 6x+8&=4x+32 && |-4x\\ 2x+8&=32 && |-8\\ 2x&=24 && |:2\\ x&=12 \end{aligned}$$

Damit ist die Frage beantwortet: Tusnelda ist heute 12 Jahre alt.

10. Wir beschriften die Endpunkte aller Strecken:



ABC ist das einzige Dreieck, von dem wir drei Stücke kennen: Den rechten Winkel bei *B* und die beiden Katheten *AB* und *BC*. Wir beginnen deshalb mit diesem Dreieck und berechnen die fehlende Seite *AC* mit dem Satz von Pythagoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$
$$\overline{AC} = 10.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks *ACD* lässt sich nun auf zwei Arten ausdrücken, einmal mit *AD* und einmal mit *AC* als Grundlinie:

$$F_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{GC} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 8 = 44,$$
$$F_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{DE} = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot h = 5h.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$5h = 44$$

mit der Lösung

$$h = \frac{44}{5} = 8.8\,.$$

Aufnahmeprüfung 2007 Mathematik 2.Teil Lösungen

1.

$$\frac{3}{16} - \frac{2x-5}{6} = \frac{13x}{24} \quad |\cdot 48$$

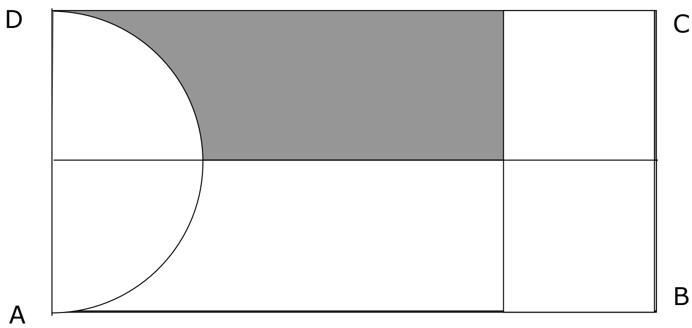
$$3\cdot 3 - 8\cdot(2x-5) = 2\cdot 13x$$

$$9 - 16x + 40 = 26x \quad |+16x$$

$$49 = 42x \quad |:42$$

$$\mathbf{\frac{49}{42} = \frac{7}{6} = 1.1666\ldots = x}$$

2.



3. Schwimmen: $\frac{1800m}{0.8m/s} = 2250s = 37.5min$

Laufen: $\frac{8.4km}{10.8km/h} = \frac{7}{9}h = 46.66\ldots$ min

37.5 +76 + 46.66… = **160.166…min** = 160min 10s

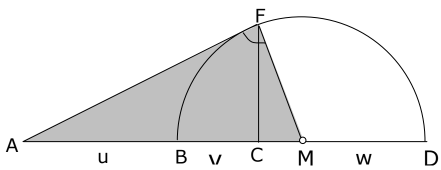
4. a) MC = w − v = 9.8cm

MF = w = 35cm

$\Rightarrow$ CF = $\sqrt{MF^2 - MC^2}$ = 33.6cm

MA = u + w = 125cm

$\Rightarrow$ **AF =** $\sqrt{MA^2 - MF^2}$ = **120cm**



b) $A_{\Delta AMF} = 0.5\cdot MA\cdot CF = 2100cm^2$ oder $\mathbf{A_{\Delta AMF} = 0.5\cdot AF\cdot MF = 2100cm^2}$

5. a) Der Betrag muss ein gemeinsames Vielfaches der Zahlen 16, 27 und 34 sein.

Das kgV ist …

$$16 = 2^4$$

$$27 = 3^3$$

$$34 = 2\cdot 17 \quad \text{kgV: } 2^4\cdot 3^3\cdot 17 = 7344$$

Der Betrag muss 3·7344 = **22'032.– Fr**. sein

b) **K1: 1377 K2: 816 K3: 648 Karten**.

6. a) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$ des Inhaltes wiegt 9.2kg – 8.4kg = 0.8kg

$\Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ des Inhaltes wiegen 8kg

$\Rightarrow$ Das Gefäss alleine wiegt 9.2kg – 8kg = **1.2kg**

b) Komplett mit Wasser gefüllt: 1.2kg + 9.6kg = **10.8kg**

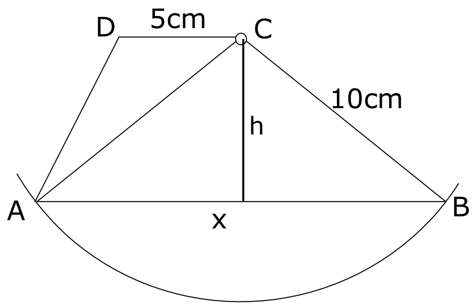
7. Wasser im Würfel:
$V_{H2O} = 10^2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 204\text{cm}^3$
Um die unteren beiden Quader 'abzudecken' braucht man
$10^2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8 = 136\text{cm}^3$
Es bleiben 204 – 136 = 68cm^3, die sich auf der Fläche $10^2 - 2 \cdot 8 = 84\text{cm}^2$ verteilen

$\Rightarrow$ **x =** 2cm + $\frac{68}{84}$ cm = **2.81cm**.

8. a) $h = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$

$\mathbf{A_{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{(x + 5)} \cdot \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}$

b) **x = 12.9cm** (A = 68.3943cm^2)
x = 13.0cm (A = 68.3941cm^2)

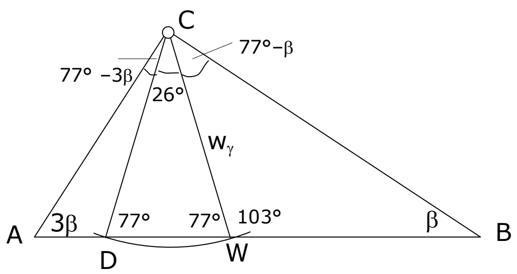


9. In Schaffhausen sind $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ der Plätze belegt.

Nachdem in Neuhausen $\frac{1}{8}$ aussteigt, sind noch $\frac{7}{18}$ Plätze besetzt.

$$\Rightarrow \frac{7}{18} \cdot x + 11 - 3 + 10 = \frac{x}{2} \quad | \cdot 18$$
$$7x + 324 = 9x$$
$$324 = 2x$$
$$\mathbf{162 = x}$$

10.



<BCW = <ACD + <DCW

$77 - \beta = (77 - 3\beta) + 26$

$2\beta = 26$

β **= 13°**